

Los Problemas Futuros de la Matemática. David Hilbert

(Versión y Traducción: José Ramón Ortiz)

Esta traducción es una versión de la conferencia original dada por el Prof. David Hilbert en el Segundo Congreso Internacional de Matemática realizado en París del 6 al 12 de Agosto de 1900. La versión original fue publicada, en alemán, en el Göttinger Nachrichten, en 1900, y un año más tarde, en 1901, en el Archiv der Mathematik und Physik, 3d ser., vol 1. Hay una versión en francés publicada en L'Enseignement mathématique, vol.2, 1900. En 1902 fue publicada una traducción en inglés realizada por Dr. Mary Winston Newton, refrendada por el propio Hilbert, en el Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 8, 1902.

¿Quién de nosotros no quisiera levantar el velo tras el cual yace escondido el futuro, y asomarse, aunque fuera por un instante, a los próximos avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo ulterior en los siglos futuros? ¿Cuáles serán las metas particulares que tratarán de alcanzar los líderes del pensamiento matemático de las generaciones futuras? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos nos depararán los siglos por venir en el ancho y rico campo del pensamiento matemático?

La historia nos enseña la continuidad del desarrollo de la ciencia. Sabemos que cada época tiene sus propios problemas, y dependerá de la próxima generación, ya sea, resolverlos o bien, desecharlos por considerarlos improductivos y remplazarlos por nuevos problemas. Si queremos darnos una idea del desarrollo probable del conocimiento matemático en el futuro inmediato, debemos plantear a nuestras mentes aquellas cuestiones dudosas al observar los problemas que la ciencia de hoy nos propone y cuya solución la esperamos del futuro. El momento presente, marcado por el encuentro de dos siglos, me parece una buena ocasión para presentar una revisión de estos problemas. Porque el cierre de una gran época no sólo nos invita a mirar al pasado, sino que también dirige nuestros pensamientos hacia el futuro.

No podemos negar el profundo significado que representan ciertos problemas tanto para el avance de la ciencia matemática en general, como por el importante papel que juegan estos problemas en el trabajo del investigador particular. Siempre que una rama de la ciencia nos ofrezca una abundancia de problemas, permanecerá siempre viva; una carencia de problemas pronosticaría una extinción o cesantía en su desarrollo independiente. Así como cada empresa humana persigue ciertos objetivos, así también la investigación matemática requiere sus problemas. Es por medio de la solución de problemas que se templa la fuerza

del investigador, descubriendo nuevos métodos y nuevos enfoques, y ganando un horizonte más vasto y más libre.

Es muy difícil y casi imposible juzgar correctamente, de antemano, el valor de un problema, porque la recompensa final depende de la ganancia que obtenga la ciencia de dicho problema. Sin embargo, podemos preguntar si existen criterios generales que puedan caracterizar lo que es un buen problema matemático,

Un matemático francés de tiempos pasados dijo: «Una teoría matemática no debe ser considerada completa hasta que sea tan clara de entender que pueda ser explicada al primer hombre que pase por la calle». Esta claridad y facilidad de comprensión, que aquí se le exige a una teoría matemática, yo la exigiría, aún con más razón, para un problema matemático perfecto; porque lo que es claro y fácil de comprender nos atrae, lo complicado nos repele.

Más aún, un problema matemático debería ser lo suficientemente difícil como para retarnos, pero sin ser inabordable, ya que burlaría nuestros esfuerzos. Por el contrario, debería ser una señal-guía para conducirnos por el laberinto de las ocultas verdades, recompensando nuestros esfuerzos con el placer que nos depara la solución hallada.

Los matemáticos de siglos pasados se ocuparon de resolver con gran fervor y pasión los problemas más difíciles. Ellos sabían el valor de estos problemas. Sólo citaré, a manera de ejemplo, el Problema de la braquistócrona de Jean Bernoulli. La experiencia nos enseña, nos explica Bernoulli en el anuncio público de este problema, que los espíritus nobles nunca cesan de trabajar por el progreso de la ciencia, por medio del planteamiento de problemas difíciles y al mismo tiempo útiles. Y de esta forma él esperaba merecer el reconocimiento del mundo matemático, siguiendo el ejemplo de Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani y otros, al plantear, ante los más distinguidos analistas de su época, un problema, por medio del cual, como con una piedra de toque, podrían ensayar la excelencia de sus métodos y al mismo tiempo valorarlos entre sí. Es así, a partir del problema de Bernoulli y de otros problemas similares, que tiene su origen el cálculo de variaciones.

Fermat ha propuesto, como es bien conocido, que la ecuación diofántica (de Diophanto): $x^n + y^n = z^n$, es imposible de resolver para números enteros x , y , z , —salvo en casos evidentes—. El problema de la demostración de esta imposibilidad nos ofrece un ejemplo convincente de la influencia que puede tener sobre la ciencia un problema tan especial y en apariencia tan poco importante. En efecto, es el problema de Fermat el que lleva a Kummer a introducir los números ideales y al descubrimiento del teorema de la descomposición unívoca de los números de un campo ciclotómico en factores ideales primos, teorema que, junto a la extensión a cualquier campo algebraico, hecha por Dedekind y Kronecker, se ha convertido en el punto central de la teoría moderna de números, y cuya significación se extiende más allá de los límites de

la teoría de números, dentro de las regiones del álgebra y la teoría de funciones.

Pasando a un campo muy diferente de investigación, me referiré al Problema de los tres cuerpos. Poincaré, al tratar de forma novedosa tan difícil problema y acercarse tanto a una solución, descubrió los métodos fecundos de una gran parte de la mecánica celeste y que hoy en día son reconocidos y aplicados por la astronomía práctica.

Estos dos problemas, el de Fermat y el de los tres cuerpos, nos parecen polos opuestos, el primero, la creación libre de la razón pura, perteneciente a la región de la teoría de números abstracta; el segundo, propuesto por los astrónomos y necesario para el conocimiento de los fenómenos más simples y fundamentales de la naturaleza.

Pero como sucede a menudo, el mismo problema especial encuentra aplicaciones en las más disímiles ramas del conocimiento matemático. Así, por ejemplo, el problema de las geodésicas juega un papel fundamental desde un punto de vista histórico, en los fundamentos de la geometría, en la teoría de curvas y superficies, en mecánica y en el cálculo de variaciones. Felix Klein, en su obra sobre el icosaedro, ha destacado convincentemente la importancia del problema de los poliedros regulares en la geometría elemental, en la teoría de grupos, en la teoría de ecuaciones y en la teoría de ecuaciones diferenciales lineales.

Para arrojar más luz sobre la importancia de ciertos problemas, voy a referirme a Weierstrass, quien consideró como un gesto providencial, el haber encontrado, en el comienzo de su carrera, un problema tan importante para su futuro trabajo como el problema de inversión de Jacobi.

Una vez expuesta la importancia general de los problemas de la matemática, vamos a pasar a la cuestión de las fuentes de donde surgen estos problemas. Seguramente, los primeros y más antiguos problemas de cada rama de la matemática surgen de la experiencia y son sugeridos por el mundo de los fenómenos externos. Aún las reglas para calcular con números enteros debe haber sido descubierta de esta manera, en un estadio primitivo de la civilización humana, justamente como los niños de hoy día aprenden las aplicaciones de estas leyes a través de métodos empíricos. Lo mismo podemos decir de los primeros problemas de la geometría, propuestos en la antigüedad, como la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo; así como los más antiguos problemas de la teoría de resolución de ecuaciones numéricas, en la teoría de curvas, en el cálculo diferencial e integral, en el cálculo de variaciones, la teoría de las series de Fourier y la teoría del potencial —sin mencionar la abundancia y riqueza de los problemas propios de la mecánica, la astronomía y la física—.

Pero, en el desarrollo progresivo de una disciplina matemática, el espíritu humano, motivado por el éxito de las soluciones, se hace consciente de su independencia. Por medio de la combinación lógica, la

generalización y la especialización, por medio de la separación y la recolección de ideas —a veces sin apreciable influencia del exterior— ésta evoluciona y a partir de ella misma produce nuevos y más fecundos problemas, y aparece, entonces, como la cuestionadora de verdad. Así surgieron, el problema de los números primos y los otros problemas de la aritmética, la teoría de Galois, de las ecuaciones, la teoría de los invariantes algebraicos, la teoría de las funciones abelianas y automorfas; de forma general, podemos decir que casi todos los problemas especiales de las teorías modernas de números y de funciones se originan de esta manera.

Así, mientras trabaja la fuerza creativa de la razón pura, el mundo exterior hace sentir de nuevo su influencia, nos impone nuevos problemas a partir de la experiencia, creando nuevas disciplinas matemáticas; y mientras buscamos conquistar estos nuevos campos del conocimiento para el acervo de la razón pura, nos encontramos, frecuentemente, con las respuestas a antiguos problemas y así, al mismo tiempo, hacemos avanzar las viejas teorías de la forma más ventajosa. Y me parece a mí, que esta repetida interacción entre la razón y la experiencia es la causa de las más sorprendentes analogías, así como la siempre preestablecida armonía con la cual el matemático percibe los problemas, los métodos y las ideas en los diversos dominios de su ciencia.

Examinaremos a continuación, someramente, las exigencias y las condiciones generales que debemos considerar para resolver un problema matemático. Primero que nada, debería ser posible establecer la exactitud de la solución por medio de un número finito de pasos basados sobre un número finito de hipótesis, las cuales están implicadas en el enunciado del problema y deben ser formuladas con precisión. Esta exigencia de deducción lógica por medio de un número finito de procesos, constituye, simplemente, la exigencia necesaria de rigor. En efecto, el rigor en la demostración, condición que hoy en día es de importancia proverbial para la matemática, corresponde a una necesidad filosófica general de nuestro entendimiento; por otra parte, sólo satisfaciendo esta exigencia, el pensamiento y la sugestividad del problema alcanzan su máxima fecundidad. Un nuevo problema, especialmente cuando proviene del mundo exterior de la experiencia, es como una joven rama, que florece y nos da frutos sólo cuando ha sido cuidadosamente injertada, de acuerdo con las estrictas reglas de la horticultura, sobre el viejo tronco, los logros establecidos de la ciencia matemática.

Es un error creer que el rigor en la demostración es enemigo de la simplicidad. Por el contrario, encontramos numerosos ejemplos en los cuales el método más riguroso es al mismo tiempo el más simple y el más fácil de entender. La mera búsqueda del rigor nos fuerza a descubrir métodos más simples de demostración. También, frecuentemente, esta búsqueda de rigor nos conduce hacia métodos con mayor capacidad de desarrollo que los viejos métodos de menor rigor. Así,

la teoría de curvas algebraicas ha experimentado una simplificación considerable y ha alcanzado una mayor unidad a través de métodos teórico-funcionales más rigurosos y la introducción consistente de consideraciones auxiliares transcendentales. Más aún, la prueba de que una serie de potencias permite la aplicación de las cuatro operaciones elementales de la aritmética así como la diferenciación y la integración término a término, y el consecuente reconocimiento de la utilidad de las series de potencias basada en esta demostración, contribuyó enormemente a la simplificación de todo el análisis, particularmente de la teoría de la eliminación y la teoría de ecuaciones diferenciales, así como las pruebas de existencia que exigieron estas teorías. Pero el mejor ejemplo, a mi forma de ver, en este orden de ideas, lo constituye el cálculo de variaciones. El tratamiento de la primera y la segunda variación de las integrales definidas requiere de cálculos extremadamente complicados, y los procedimientos aplicados por los matemáticos del pasado carecían del rigor necesario. Fue Weierstrass el primero en mostrarnos el camino hacia una nueva y segura fundamentación del cálculo de variaciones. Por medio de los ejemplos de la integral simple y de la integral doble, en breve mostraré, hacia el final de mi conferencia, como esto nos conduce directamente a una sorprendente simplificación del cálculo de variaciones. Señalaré que en la demostración de los criterios necesarios y suficientes para la existencia de un mínimo y un máximo, el cálculo de la segunda variación y una parte de los fatigantes razonamientos relativos a la primera variación son totalmente superfluos, sin hablar del considerable progreso aportado por la eliminación de las restricciones a las variaciones para las cuales las derivadas de las funciones variaban muy poco.

Me gustaría, por otra parte, mientras insisto sobre el rigor en el razonamiento como una condición necesaria para la solución completa de un problema, presentar mi desacuerdo con la opinión de que los conceptos del análisis, o los de la aritmética, son los únicos susceptibles de un tratamiento completamente riguroso. Esta opinión, que, ocasionalmente, ha sido sostenida por hombres eminentes, la considero completamente errónea. Tal interpretación unilateral de la exigencia de rigor nos conduciría, rápidamente, a ignorar los conceptos que surgen de la geometría, la mecánica o la física, hasta llegar a paralizar el flujo de nuevo material proveniente del mundo exterior, y finalmente, como última consecuencia, al rechazo de las ideas del continuo y de los números irracionales. ¡Ignorar la fuente de la geometría y la física matemática, sería como extirpar un nervio vital para la ciencia matemática! Por el contrario, yo creo que cualquiera que sea la fuente de donde provienen las ideas matemáticas, ya sea de la teoría del conocimiento o de la geometría, o de las teorías de las ciencias físicas y naturales, el problema matemático consistirá en investigar los principios fundamentales que subyacen a estas ideas para establecerlos en un

sistema simple y completo de axiomas, de tal forma que la exactitud y rigor de las nuevas ideas y su susceptibilidad de deducción no sea inferior de los antiguos conceptos aritméticos.

A los nuevos conceptos le corresponden, necesariamente, nuevos símbolos. Y estos deben ser escogidos de tal forma que nos recuerden los fenómenos que motivaron la creación de estos nuevos conceptos. De esta forma, las figuras geométricas son los símbolos que representan la intuición espacial, y son usados por todos los matemáticos. ¿Quién no ha utilizado la doble desigualdad $a > b > c$, visualizada como tres puntos consecutivos sobre una línea recta, como el símbolo geométrico que representa el concepto «entre»? ¿Quién, al tratar de probar un difícil teorema sobre la continuidad de funciones o sobre la existencia de puntos de condensación, no ha dibujado segmentos de recta o rectángulos encerrados unos dentro de otros? ¿Quién podría prescindir de la figura del triángulo, el círculo con su centro, o la cruz que forman los ejes de coordenadas? ¿O de la representación de un campo vectorial, o la figura de una familia de curvas o superficies con su cubrimiento, que juega un papel tan importante en la geometría diferencial, en la teoría de ecuaciones diferenciales, en los fundamentos del cálculo de variaciones, y en otras ramas de las ciencias matemáticas puras?

Los símbolos aritméticos son números escritos y los símbolos geométricos son fórmulas dibujadas; y ningún matemático podría prescindir de estas fórmulas dibujadas, de la misma forma que no podría prescindir de los paréntesis o de cualquier otro símbolo analítico a la hora de realizar un cálculo.

La aplicación de los símbolos geométricos como método riguroso presupone el conocimiento exacto y completo de los axiomas que son el fundamento de esas figuras; y para que esas figuras geométricas puedan ser incorporadas al tesoro general de los símbolos matemáticos, se hace necesaria una rigurosa investigación de su contenido conceptual. De la misma forma que al sumar dos números, se deben colocar los dígitos uno debajo del otro en el orden correcto para que sólo las reglas de la aritmética, es decir, los axiomas de la aritmética, determinen el uso correcto de los dígitos, el uso de los símbolos geométricos debe estar determinado por los axiomas de los conceptos geométricos y sus combinaciones.

La coincidencia entre el pensamiento geométrico y el pensamiento aritmético se revela también en lo siguiente: en la investigación aritmética, lo mismo que en las consideraciones geométricas, no remontamos la cadena deductiva hasta los axiomas, y por el contrario, especialmente en el primer enfrentamiento del problema, lo abordamos por medio de una combinación de razonamientos, rápidos e inconscientes, pero no definitivos, con una confianza absoluta en un cierto sentimiento aritmético acerca del comportamiento de los símbolos aritméticos. Sin esta confianza, no podríamos hacer progresar a la aritmética,

así como tampoco a la geometría sin la imaginación geométrica, la facultad que nos hace ver en el espacio. Como un ejemplo de una teoría aritmética que opera rigurosamente con los conceptos y los símbolos de la geometría, podríamos mencionar la obra de Minkowski: *Geometrie der Zahlen*.

Aquí sería conveniente señalar algunas de las dificultades que podrían presentar los problemas matemáticos y la forma de superarlas.

Si no podemos resolver un problema matemático, la razón suele ser, frecuentemente, nuestra falta al no poder reconocer un punto de vista más general, en el cual nuestro problema aparece como un simple vínculo en una cadena de problemas relacionados. Después de encontrar este punto de vista, no solamente se hace el problema más accesible a nuestra investigación, sino que al mismo tiempo nos apropiamos de un método también aplicable a los problemas relacionados. Citaré como ejemplos, dentro de la teoría de las integrales definidas, la introducción por parte de Cauchy de los caminos complejos de integración y, dentro de la teoría de números, la introducción por parte de Kummer de la noción de número ideal. Esta forma de hallar métodos más generales es, sin lugar a dudas, la más accesible y la más segura; porque aquellos que buscan métodos sin tener en mente un problema determinado, buscan, la mayor parte del tiempo, en vano.

En los problemas matemáticos, según mi forma de ver, la particularización juega un papel más importante que la generalización. Quizás, en la mayoría de los casos, la causa de no haber podido hallar la solución de un problema, reside en el hecho de no haber tratado primero de resolver los problemas más sencillos y fáciles. Todo depende, entonces, en hallar estos problemas más sencillos y tratar de resolverlos por medio de los procedimientos más rigurosos con que contemos y de aquellos conceptos susceptibles de generalización. Esta regla es una de las más importantes palancas para remover las dificultades matemáticas y, me parece, que siempre la usamos, aunque quizás, inconscientemente.

Ocasionalmente sucede que buscamos la solución bajo hipótesis incompletas o en un sentido incorrecto, y por esta razón no tenemos éxito. De aquí surge el siguiente problema: demostrar la imposibilidad de la solución bajo las hipótesis dadas, o en el sentido considerado. Tales pruebas de imposibilidad fueron realizadas por los antiguos; así, por ejemplo, demostraron que la razón entre la hipotenusa y el lado de un triángulo rectángulo isósceles es irracional. Posteriormente, las preguntas sobre la imposibilidad de ciertas soluciones juegan un papel prominente; y percibimos, de esta manera, que los problemas difíciles de la antigüedad, como la prueba del axioma de las paralelas, la cuadratura del círculo, o la resolución por radicales de las ecuaciones de quinto grado, han encontrado finalmente una solución rigurosa y satisfactoria, aunque en un sentido muy diferente a la intención original.

Y, probablemente, sea este hecho fundamental, junto con otras razones filosóficas, lo que suscite la convicción compartida por todos los matemáticos, aunque sin una prueba que la sustente, de que todo problema matemático bien definido debe ser necesariamente susceptible de una solución exacta, ya sea en la forma de una respuesta directa a la pregunta planteada, o por medio de la demostración de la imposibilidad de hallar una solución, es decir, el necesario fracaso de toda tentativa de demostración futura. Tomemos cualquier problema no resuelto, tal como la pregunta sobre la irracionalidad de la constante C de Euler-Mascheroni o la existencia de un número infinito de números primos de la forma $2n + 1$. Por más que estos problemas parezcan inabordables, y nos sintamos incapaces ante ellos, sin embargo, tenemos la firme convicción de que su solución debe seguir un número finito de deducciones lógicas

¿Es este axioma de la posibilidad de resolver todo problema una característica particular del pensamiento matemático, o es consecuencia de una ley general inherente a la naturaleza de nuestro entendimiento, la creencia de que toda pregunta planteada por nuestro entendimiento debe ser susceptible de una solución? En otras ciencias también encontramos problemas antiguos que han sido resueltos por medio de la demostración de su imposibilidad. Podemos citar, como ejemplo, el problema del movimiento perpetuo. Después de muchos fracasos al tratar de construir una máquina de movimiento perpetuo, los científicos investigaron las relaciones que deben existir entre las fuerzas de la naturaleza si tal máquina fuera imposible; y esta pregunta inversa llevó al descubrimiento de la ley de la conservación de la energía, la cual, al mismo tiempo, explicaba la imposibilidad del movimiento perpetuo en el sentido original.

Esta convicción en la resolución de todo problema matemático es un gran incentivo para el investigador. Siempre escuchamos dentro de nosotros la llamada perenne: He aquí el problema. Busca la solución. La puedes hallar usando el razonamiento puro, porque el matemático nunca dirá : «ignorabimus».

(A continuación, en un esfuerzo por acortar la conferencia como le habían sugerido Minkowski y Hurwitz, Hilbert se vio precisado a presentar sólo 10 problemas de un total de 23 que había enumerado en su manuscrito, los cuales fue ilustrando con pequeñas sipnosis de sus orígenes y significado).

Los tres primeros correspondían a los fundamentos de la matemática:

1. Probar la hipótesis de Cantor sobre el «continuo». Todo conjunto de números reales puede ser puesto en correspondencia biunívoca, o bien con un conjunto de números naturales o con el conjunto de todos los números reales (el continuo).

2. Investigar la consistencia (no-contradicción) de los axiomas de la aritmética.

6. Axiomatizar las ciencias físicas.

Hasta aquí —continuó Hilbert— sólo hemos considerado problemas relacionados con los fundamentos de la ciencia matemática. Desde luego, que el estudio de los fundamentos de una ciencia siempre son importantes, y el análisis de estos fundamentos siempre estará entre los problemas más importantes para el investigador. Weierstrass dijo: «El objetivo final que siempre debemos tener presente es llegar al conocimiento correcto de los fundamentos... Pero para progresar en las ciencias es indispensable resolver los problemas individuales». De hecho, un acucioso conocimiento de sus teorías especiales es necesario para el tratamiento satisfactorio de los fundamentos de la ciencia. Sólo aquel arquitecto que conoce el propósito y todos los detalles de la estructura está en la posición de construir unas fundaciones seguras.

Los cuatro problemas siguientes fueron seleccionados de la aritmética y el álgebra.

7. Establecer la trascendencia, o al menos la irracionalidad, de ciertos números

8. Problemas sobre los números primos

13. Probar la imposibilidad de la resolución de la ecuación general de séptimo grado por medio de funciones de sólo dos argumentos.

16. Problemas sobre topología de curvas y sobre superficies algebraicas.

Los últimos tres problemas seleccionados por Hilbert para cerrar su conferencia correspondía a la teoría de funciones:

19. Determinar si las soluciones de los problemas “regulares” del cálculo de variaciones son necesariamente analíticas.

21. Probar que siempre existe una ecuación diferencial lineal de clase fuchsiana, dados sus puntos singulares y su grupo monodrómico.

22 Generalizar un teorema probado por Poincaré, en el sentido que siempre es posible uniformizar cualquier relación algebraica entre dos variables por medio de funciones automorfas de una variable.

Los problemas mencionados —Hilbert expresó a su audiencia— son apenas algunos ejemplos de problemas, pero creo que son suficientes para mostrarnos lo rico, variado y extenso de la ciencia matemática de hoy; lo cual nos hace pensar si acaso la matemática no estará destinada, como otras ciencias que se han dividido en numerosas ramas, y sus representantes han terminado sin entenderse unos con otros, haciendo muy difícil su vinculación. Pero no creo que sea este nuestro caso, ni lo deseo. En mi opinión, la ciencia matemática es un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad esta condicionada por la conexión de sus partes. Porque, a pesar de toda la variedad del conocimiento matemático, estamos conscientes de la similitud de sus procedimientos lógicos, el parentesco de las ideas matemáticas como un todo y las numerosas

analogías en sus diferentes dominios. Más aún: cuanto más se desarrolla una teoría matemática, más gana en armonía y en uniformidad, y surgen inesperadas relaciones entre sus diferentes ramas. De aquí que, con el crecimiento de la matemática, su carácter orgánico no disminuye, sino que se manifiesta más clara y evidentemente.

Pero, preguntamos: ¿Con el crecimiento del conocimiento matemático no se hará imposible, para cualquier investigador individual, abarcar todos los dominios de este conocimiento? Para contestar, me permito hacer referencia al perfecto engranaje de esta ciencia matemática, en la cual todo verdadero avance va acompañado de la invención de instrumentos más finos y de métodos más simples, que al mismo tiempo que nos asisten a la comprensión de nuevas teorías, nos ayudan a rechazar desarrollos más complicados. Es por ello que se hace posible para el investigador individual, una vez que domina estos finos instrumentos y estos métodos simples, encontrar su camino en los diferentes dominios de la matemática más fácilmente que para los investigadores de otras ciencias.

La unidad orgánica de la matemática es inherente a la naturaleza de esta ciencia, porque la matemática es el fundamento de todo conocimiento exacto sobre los fenómenos naturales. Y si el nuevo siglo nos diera los talentosos profetas y los discípulos entusiastas, quizás pudiera satisfacerse completamente este magno destino de la matemática.