La nueva fundamentación de las matemáticas

Los fundamentos de las matemáticas han constituido desde hace mucho tiempo un objeto de investigación para autores del más diverso tipo. En el curso de tales estudios han podido surgir y desarrollarse brillantes ideas y se han alcanzado resultados de gran significación y alcance.

En nuestra opinión, en la actualidad se hace indispensable un tratamiento mucho más profundo de los problemas que surgen en esta esfera del conocimiento. Y si en lo personal nos hemos propuesto llevar a cabo esta tarea, ello se debe menos a la intención de reafirmar alguna teoría matemática particular que a la convicción de que ninguna de las investigaciones realizadas hasta ahora acerca de los fundamentos de las matemáticas ha permitido reconocer realmente un método que haga posible la formulación de las cuestiones atinentes a éstos de manera que pueda ofrecerse una respuesta unívoca a los problemas que los mismos plantean. Y es esto precisamente lo que para nosotros se presenta como una exigencia primaria.

En otras palabras, en las matemáticas no debe haber cuestiones que den lugar a dudas de principio, en las matemáticas no deben tener cabida las verdades a medias, ni tampoco pueden admitirse verdades de tipo esencialmente distinto.

De acuerdo con esto y tomando como ejemplo un problema complicado y lejano, debe ser posible formular el axioma de elección de Zermelo en forma tal que resulte tan válido y confiable como la afirmación aritmética de que $2 + 2 = 4$.

Tenemos la plena confianza de que los fundamentos de las matemáticas pueden ser objeto de una clarificación y un conocimiento plenos, pero también de que, aunque sumamente complicado, el problema de la fundamentación de nuestra disciplina es susceptible de una solución definitiva. En lo que sigue presentaremos en forma resumida una descripción de los medios con los que creemos haber alcanzado ese objetivo, así como del sentido que todo esto pueda tener.

Es un hecho que en la actualidad podemos constatar un interés particular en lo que se refiere a estos problemas. Matemáticos de la talla de Weyl y Brouwer han intentado encontrar una solución a estas dificultades, pero la vía que han sugerido dista, en nuestra opinión, de ser satisfactoria.

Weyl sostiene, en su crítica de las fundamentaciones del concepto de número propuestas hasta ahora, que el procedimiento usual es circular. Weyl cree descubrir un círculo vicioso en el hecho de que al definir los números reales se haga uso de segmentos que dependen de la existencia de números reales con una cierta propiedad. La situación que aquí se presenta parecería ser la siguiente.

Cuando tomamos como punto de partida la definición usual de los números reales como cortaduras de Dedekind, como sucesiones numéricas o como sucesiones fundamentales, lo que a juicio de un matemático común se nos presenta es la coexistencia de distintas perspectivas metódicas. La que Weyl elige y en razón de la cual demuestra la circularidad no es, sin embargo, una de ellas, sino que parecería tratarse más bien de algo preparado de manera artificial.

Weyl justifica su singular concepción argumentando que en ella se preserva el principio de constructividad. Pero es claro que una vez que había mostrado la existencia de un círculo vicioso, lo que tenía que hacer era más bien reconocer que esa concepción, y con ella el principio de constructividad mismo, resultan inutilizables en la versión que nos presenta y utiliza, reconociendo también que a partir de ese enfoque el camino hacia el análisis nos está vedado.

Los enfoques usuales en las matemáticas no se apoyan en forma alguna en el principio de constructividad, pero tampoco son circulares en el sentido que quiere Weyl. Fundamentalmente son dos los puntos de vista a considerar.

El primero plantearía algo como esto. Un número real es una división en segmentos de números racionales que posee la propiedad dedekindiana de las cortaduras. Por supuesto, aquí el concepto de segmento de números racionales es definido de manera precisa, en lo que se refiere a su contenido, y delimitado de igual manera en cuanto a su alcance.

La objeción que frecuentemente se hace a esta definición es que el concepto de segmento de números racionales es esencialmente equivalente al concepto de conjunto, y éste, considerado en toda su generalidad, conduce, como sabemos, a paradojas.

En caso de que Weyl haga suya en alguna forma esta objeción, lo primero que tenemos que notar es que el argumento no es conclusivo. La circunstancia de que el concepto de conjunto no resulte lícito y permisible cuando se le considera en toda su generalidad no excluye la posibilidad de que el concepto de conjunto de números enteros sea fundamentalmente correcto. Y, por lo demás, las paradojas de la teoría de conjuntos no pueden ser en forma alguna entendidas como una demostración de que el concepto de conjunto de los números enteros conduce a contradicciones. Por el contrario: todas nuestras experiencias matemáticas hablan en favor de la corrección y consistencia de ese concepto. Podría argumentarse, sin embargo, que los requerimientos de exactitud prevalecientes en las matemáticas no permiten la aceptación tácita de una suposición de ese tipo en la construcción de una teoría. En tal caso, tenemos que remitirnos al segundo de los enfoques mencionados para la fundamentación del concepto de número y en relación al cual esta objeción no resulta válida. Es decir, tenemos que recurrir al método de fundamentación axiomático. Podemos caracterizar este punto de vista de la manera siguiente.

El continuo de los números reales es un sistema de objetos vinculados entre sí por medio de relaciones definidas, que llamamos axiomas. En particular, tenemos en este contexto que la definición de los números reales mediante cortaduras de Dedekind es reemplazada por los dos axiomas de continuidad, esto es, por el axioma de Arquímedes y por el llamado axioma de completud. Las cortaduras de Dedekind pueden entonces ser usadas para el establecimiento de números reales particulares, sin utilizarse ya para la definición del concepto general de número real. Conceptualmente, un número real no es otra cosa que un objeto de nuestro sistema.

La fundamentación axiomática de la teoría del continuo no se opone en forma alguna a la intuición. En realidad, el concepto de magnitud extendida, tomado de la intuición, es algo independiente del concepto de número, por lo que la distinción fundamental que aquí proponemos entre número y extensión es perfectamente compatible con aquélla.

El enfoque que hemos descrito resulta impecable desde un punto de vista lógico, por lo que el problema que ahora se plantea es el de decidir si un sistema de este tipo es viable, es decir, si los axiomas no conducen a una contradicción.

Difícilmente encontraremos dentro o fuera de las matemáticas una esfera de la ciencia que haya sido objeto de una investigación más acuciosa que el análisis real. El examen y el seguimiento de aquellos principios deductivos basados en el concepto de conjunto de números ha sido literalmente llevado a su extremo, sin que en ningún sitio se haya presentado ni siquiera la sombra de un error.

Por lo tanto, cuando Weyl cree descubrir una "inestabilidad interna en los fundamentos sobre los que descansa la construcción misma de ese sistema" y se preocupa por el "peligro de disolución que acecha al Estado que llamamos análisis", lo que en realidad ocurre es que ve fantasmas.

En verdad, y a pesar de lo complejo y diverso de las combinaciones que allí se realizan y de lo refinado de los recursos empleados para ello, en el análisis tenemos de hecho una seguridad completa en lo que se refiere a las deducciones, además de una unanimidad más que evidente en cuanto a los resultados obtenidos.

En consecuencia, resulta plenamente justificada la suposición de los axiomas en los que esa seguridad y esa unanimidad se basan. Poner en tela de juicio esta justificación equivale a despojar a la ciencia de toda posibilidad de llevar a cabo las tareas que le son propias. Si la axiomática resulta adecuada en algún lugar, es precisamente aquí.

Por supuesto que con ello se plantea también el problema de dar una prueba de la consistencia de los axiomas. Se trata, en efecto, de un problema conocido y que personalmente nos ha ocupado desde hace más de 20 años. La presente comunicación se ocupa de la solución de este problema.

Lo que Weyl y Brouwer pretenden hacer equivale en principio a recorrer nuevamente el camino que alguna vez siguiera Kronecker. Es decir, Weyl y Brouwer intentan ofrecer una fundamentación de las matemáticas que echa por la borda todo aquello que les resulta incómodo y que establece además (en el sentido de su predecesor) una serie de prohibiciones claramente dictatoriales. Pero esto no significa otra cosa que el desmembramiento, la amputación arbitraria de nuestra disciplina. Al seguir a tales reformadores nos exponemos a perder una gran parte de nuestros más valiosos conceptos, resultados y métodos. Entre las cosas que Weyl y Brouwer pretenden proscribir de las matemáticas se encuentran los conceptos generales de número irracional, de función (lo mismo que el más particular de función numérica), los números cantorianos de clases superiores, etc. Teoremas como el de que en una totalidad infinita de números enteros existe siempre un mínimo e inclusive la ley lógica del tercero excluido en afirmaciones como "O bien existe solamente un número finito de números primos, o bien existe un número infinito de los mismos" son ejemplos de proposiciones y principios deductivos que nos estarían prohibidos.

Estamos firmemente convencidos de que así como Kronecker fracasó en su intento de eliminar a los números irracionales (Weyl y Brouwer todavía nos permiten conservar algún fragmento de los mismos) sus seguidores no correrán con mejor suerte. Brouwer ciertamente no representa, como cree Weyl, la revolución, sino tan sólo una nueva edición de un intento de golpe de Estado que se sirve de recursos por demás añejos, un golpe de Estado intentado en su tiempo de manera mucho más brillante y rigurosa y que, no obstante, fracasó por completo. Al presente y con un poder estatal firme y bien pertrechado gracias a las contribuciones de matemáticos de la talla de Frege, Dedekind y Cantor, la nueva asonada está condenada desde el principio a correr la misma suerte que la precedente.

En resumen, si vamos a hablar de una crisis en las matemáticas no podemos afirmar, como hace Weyl, que se trata de una nueva crisis en nuestra disciplina. El círculo vicioso es algo que Weyl introduce de manera artificial en el análisis. La descripción de la supuesta inseguridad que permea los resultados del análisis no corresponde a ningún hecho real.

En lo que se refiere a las tendencias constructivistas, en las que tanto Weyl como Brouwer hacen gran énfasis, podemos afirmar que es precisamente Weyl el que ha errado por completo el camino para la realización de las mismas. La vía axiomática es, de hecho, la única capaz de hacer justicia a tales tendencias, en la medida en la que tales tendencias resulten naturales.

El objetivo que nos hemos propuesto es entonces el de dar un fundamento seguro a las matemáticas. Nuestra intención es devolver a nuestra disciplina el antiguo prestigio de consistir de verdades indiscutibles, del que las paradojas de la teoría de conjuntos parecieron despojarla. Tenemos la firme convicción de que esto es realizable y que no significa ningún tipo de renuncia a sus partes constitutivas. El método adecuado para la realización de estos fines es, por supuesto, el método axiomático. Lo esencial de este método se expondrá a continuación.

Cuando queremos investigar una esfera particular del conocimiento, lo que hacemos es tratar de darle una base en el menor número posible de principios. Estos principios, a los que llamamos axiomas, han de ser tan simples, intuitivos y comprensibles como sea posible. Al hacer esto, nada nos impide tomar como axiomas proposiciones demostrables o proposiciones que pensemos que son susceptibles de prueba. La historia nos ofrece en verdad evidencia clara de lo adecuado de este procedimiento.

Recordemos, como ejemplos de lo anterior, el postulado de Legendre sobre números primos en la teoría de los residuos cuadráticos, la conjetura de Riemann sobre los ceros de la función $\zeta(s)$, el principio de la existencia de raíces en el álgebra y, por último, la llamada hipótesis ergódica, un principio de cuya prueba estamos todavía muy alejados y que, no obstante, se ha convertido en fundamento de la mecánica estadística.

El método axiomático constituye entonces el recurso irrenunciable y más adecuado a nuestro intelecto para cualquier investigación exacta, independientemente del sitio en el que ésta se lleve a cabo. La axiomatización es un procedimiento no sólo fructífero, sino impecable desde el punto de vista lógico, además de garantizar la más amplia libertad en la investigación científica. Proceder de manera axiomática no significa otra cosa que pensar conscientemente [mit Bewusstsein denken].

Por supuesto, todo esto también ocurría antes, sin el método axiomático. Pero tenía lugar de una manera ingenua, por lo que ciertas relaciones adquirían el carácter de dogmas. La axiomatización nos libera de esa ingenuidad, pero nos permite disfrutar aún de los beneficios de la creencia.

Hay algo aquí, sin embargo, que es mucho más importante. Precisamente gracias al desarrollo que experimenta bajo nuestra concepción el método axiomático, estamos en condiciones de apreciar la manera en la que éste nos permite alcanzar la máxima claridad acerca del papel que juegan los principios deductivos en las matemáticas.

Como ya hemos mencionado, no podemos tener nunca la plena seguridad de que los axiomas elegidos son consistentes, si no hemos dado todavía una demostración explícita de este hecho. La axiomática nos obliga entonces a adoptar una posición en lo que se refiere a este complejo problema epistemológico.

En muchos casos resulta posible ofrecer una demostración de la consistencia de los axiomas. Esto ocurre, por ejemplo, en la geometría, en la termodinámica, en la teoría de la radiación, así como en otras disciplinas físicas. Pero en todas ellas lo que se hace es remitir el problema a la consistencia de los axiomas del análisis. La consistencia de éstos constituye todavía un problema abierto en las matemáticas. En realidad, hasta ahora han sido más bien escasos los intentos serios de establecer la consistencia de los axiomas de la teoría de los números, del análisis o de la teoría de conjuntos.

A Kronecker se debe la famosa afirmación de que Dios creó los números enteros y el resto es obra de los hombres. De acuerdo con esto, quien bien puede ser considerado como el dictador por antonomasia en las matemáticas proscribió todo lo que no se presentaba como número entero. Una extensión de sus reflexiones acerca de los números enteros era algo que, en consecuencia, se alejaba de sus intereses personales y de su escuela.

Poincaré, por su parte, se encuentra de antemano convencido de la imposibilidad de dar una demostración de la consistencia de los axiomas de la aritmética. En su opinión, el principio de inducción completa no es sino una propiedad de nuestro espíritu; es decir, en el lenguaje de Kronecker, algo creado por Dios mismo[1]. Su objeción acerca de la imposibilidad de demostrar ese principio de otra manera que recurriendo a la inducción completa misma es injustificada y es, de hecho, refutada por nuestra teoría.

En la filosofía sí ha sido reconocida la importancia del problema de la consistencia de los axiomas de un sistema. Sin embargo, en la literatura existente al respecto no hemos logrado encontrar ninguna exigencia clara de solución de este problema en un sentido matemático. Por el contrario, los viejos esfuerzos por fundamentar la teoría de los números y el análisis en la teoría de conjuntos y ésta en la lógica tocan el núcleo mismo de toda esta problemática.

Tanto Frege como Dedekind han intentado ofrecer una fundamentación de la teoría de los números, recurriendo exclusivamente a la lógica pura el primero, y apoyándose en la teoría de conjuntos en tanto parte de esta última el segundo. Sin embargo, ninguno de ellos ha conseguido llevar a feliz término sus objetivos originales. En Frege tenemos una serie de construcciones de conceptos de uso corriente en la lógica que son aplicados sin la debida precaución en las matemáticas. Frege considera, por ejemplo, que la extensión de un concepto es algo dado sin más, de

[1] *Cfr.* "Les mathématiques et la logique", en *Rev. Met. et Mor.* 14, 1906 pp. 21-22. [N. de T.]

tal manera que puede tomarse, a su vez, sin restricciones, como un nuevo objeto. En cierto sentido, podemos decir que su error consiste en incurrir en un realismo conceptual extremo.

Algo parecido le ocurre a Dedekind. Su error, ya clásico, consiste en tomar como punto de partida el sistema de todos los objetos. Y no obstante lo agudo que pudiera parecernos su brillante idea de tomar al infinito mismo como fundamento del número finito, en la actualidad se reconoce generalmente la imposibilidad de este proyecto (entre otras razones debido a los argumentos que se mencionan más abajo).

A pesar de todas estas dificultades, los trabajos de Frege y Dedekind son de un inmenso valor. Ciertamente a ellos se debe el inicio de la crítica moderna del análisis, continuada más adelante por pensadores como Cantor, Zermelo y Russell. Esta crítica no "desemboca", como quiere Weyl, "en el caos y el vacío", sino más bien, por una parte, en teorías (particularmente las de Zermelo y Russell) de gran profundidad y que se encuentran provistas de una base axiomática y, por la otra, en un desarrollo idóneo del llamado cálculo lógico, cuyas ideas se han convertido con el tiempo en un instrumento absolutamente imprescindible para la investigación lógico-matemática.

Este sería, en nuestra opinión, el panorama que actualmente presentan los fundamentos de las matemáticas. De acuerdo con ello, la conclusión satisfactoria de las investigaciones relativas a los mismos es algo que sólo puede lograrse con la solución del problema de la consistencia de los axiomas del análisis. Al ofrecer una demostración de este tipo, estaríamos constatando al mismo tiempo el carácter indubitable y definitivo de los teoremas matemáticos, un hecho que por su naturaleza filosófica general resulta de gran interés y significación.

Ocupémonos entonces de la solución de este problema.

Como hemos visto, el manejo abstracto de las extensiones de conceptos y de los contenidos ha mostrado ser no sólo insuficiente, sino también bastante inseguro. Más bien, lo que se hace necesario como medida previa a la aplicación de inferencias y operaciones lógicas es la existencia en la representación [Vorstellung], como algo dado, de ciertos objetos extralógicos discretos, intuitivamente presentes antes de cualquier pensamiento como vivencia inmediata.

Si la inferencia lógica ha de tener la seguridad que deseamos, estos objetos deben ser susceptibles de una visión global y completa de todas sus partes, y su postulación, distinción y sucesión deben presentarse ante nosotros de inmediato con los objetos mismos de manera intuitiva, como algo irreductible.

En este enfoque, en clara y explícita oposición a Frege y Dedekind, son los *signos* mismos los objetos de la teoría de los números. Entendemos aquí por signo algo cuya forma es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce, de las variaciones insignificantes en su trazado y que, en general y de manera segura, puede ser identificado[2]. El enfoque que consideramos adecuado y necesario para la fundamentación no sólo de las matemáticas puras, sino en general de todo el pensamiento, la comprensión y la comunicación científicas, puede entonces expresarse en una frase diciendo: *en un principio era el signo.*

Una vez provistos de estas ideas filosóficas, podemos pasar a ocuparnos de la teoría elemental de los números. Preguntémonos, en primer lugar, si (y en qué medida) la teoría de los números puede erigirse sobre la base puramente intuitiva de los signos concretos. Comencemos entonces por la definición de número.

El signo 1 es un número.

Un signo que comienza y termina con 1, de modo que siempre que el signo 1 aparezca antes del final sea seguido de +, y siempre que tengamos + le siga 1 es también un número.

De acuerdo con lo anterior, los signos

$$1 + 1$$

$$1 + 1 + 1$$

son números.

Estos numerales o signos numéricos [Zahlzeichen] son, en realidad, números y constituyen enteramente a éstos, convirtiéndose ahora ellos mismos en objeto de nuestro estudio. Pero los numerales carecen por completo de cualquier otro *significado* fuera de éste.

Aparte de estos signos, nos serviremos de otros que sí tienen un significado y poseen una función comunicativa. Del signo 2, por ejemplo, como una abreviatura de 1 + 1 , de 3 en lugar de 1 + 1 + 1 , etc. Además

---

[2] En este sentido, llamaremos "el mismo signo" a aquellos signos que tengan la misma forma.

de éstos, usaremos los signos = y > que resultan de utilidad para la comunicación de afirmaciones. De esta manera, *v.gr.*

$$2 + 3 = 3 + 2$$

no es una fórmula[3], sino que tiene solamente la función de comunicar (tomando en cuenta las abreviaturas que hemos introducido) que 2 + 3 y 3 + 2 son, en realidad, uno y el mismo signo, esto es, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 . Tampoco

$$3 > 2$$

es una fórmula, sino que sirve exclusivamente para comunicar el hecho de que el signo 3, esto es, 1 + 1 + 1 es más extenso que el signo 2, es decir, que 1 + 1 , o lo que es lo mismo, que este último es un segmento de aquél.

Para los fines de la comunicación utilizaremos también las letras minúsculas góticas $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ como numerales. $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ no es entonces una fórmula, sino tan sólo la comunicación de que el numeral $\mathfrak{b}$ es más extenso que el numeral $\mathfrak{a}$. Desde este perspectiva, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ no sería tampoco otra cosa que la comunicación de que el numeral $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ es el mismo que $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. La exactitud concreta de esta comunicación puede comprobarse fácilmente como sigue. Supongamos (como parece lícito hacer) que $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$, es decir, que el numeral $\mathfrak{b}$ es más extenso que $\mathfrak{a}$. En ese caso, $\mathfrak{b}$ puede analizarse como $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$, donde $\mathfrak{c}$ tiene la función de comunicar un número. Tenemos entonces que demostrar que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$, esto es, que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ es el mismo numeral que $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$. Pero es precisamente esto lo que ocurre, si es que $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ es el mismo signo que $\mathfrak{c} + \mathfrak{a}$; es decir, si $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$.

Con ello hemos prescindido, en relación a la comunicación original, de por lo menos un 1 (gracias a la separación de $\mathfrak{a}$). Este procedimiento de separación puede continuarse hasta que los sumandos a intercambiar coincidan. Como todo numeral, $\mathfrak{a}$ está conformado por los signos 1 y + y puede también descomponerse por separación y cancelación de los signos individuales.

En una teoría de los números de este tipo no hay, por supuesto ningún axioma, ni tampoco son posibles las contradicciones. Lo que

---

[3] Como Bernays observa, Hilbert requiere aquí de la palabra "fórmula" en su sentido estrecho, esto es, para referirse a las fórmulas de la matemática formalizada. Así como se habla de signos con significado, puede también hablarse de fórmulas con significado. [N. de T.]

tenemos son signos concretos como objetos, signos con los que operamos y sobre los que hacemos afirmaciones concretas. En lo que se refiere a la prueba de $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ que acabamos de ofrecer, es necesario hacer especial hincapié en que esa demostración no es otra cosa que un procedimiento basado enteramente en la composición y descomposición de los numerales y que difiere esencialmente del principio de inducción matemática completa o inferencia de n a $n + 1$, de fundamental importancia para la aritmética superior.

Como veremos más adelante, la inducción matemática completa es un principio formal de mayor alcance, un principio de nivel superior que a su vez requiere (y es susceptible) de una demostración.

Es seguro que el enfoque intuitivo y concreto que acabamos de describir y utilizar nos permite avanzar considerablemente en la teoría de los números. Pero es también evidente que resulta imposible construir de esta manera la totalidad de las matemáticas. Ya en el paso a la aritmética superior y al álgebra, por ejemplo, esto es, cuando queremos hacer afirmaciones sobre un número infinito de números o de funciones, este procedimiento concreto resulta del todo insuficiente. La razón de ello es que no podemos escribir numerales o abreviaturas para un número infinito de números. De no tener presente esta dificultad, incurriríamos de inmediato en toda la serie de absurdos que con toda razón Frege ha criticado en examen de las distintas definiciones de los números irracionales que tradicionalmente se han presentado.

Pero tampoco el análisis puede ser construido por este método. Para esta construcción se requiere de fórmulas reales, de fórmulas propiamente dichas, por lo que las comunicaciones concretas, tal y como éstas se aplican en la teoría elemental de los números, no bastan para dar cuenta del fundamento del mismo.

Sin embargo, podemos adoptar una perspectiva similar si nos ubicamos en un nivel superior de observación. En éste, los axiomas, las fórmulas y las demostraciones de una teoría matemática constituyen propiamente el objeto de una investigación concreta. Para este fin debemos reemplazar las argumentaciones concretas normales en una teoría matemática por fórmulas y reglas, representarlas por medio de formalismos. Es decir, es necesario llevar a cabo una formalización estricta de la totalidad de la teoría matemática que incluya sus demostraciones, de tal manera que tanto las inferencias como la construcción de conceptos en ella sean integrados, siguiendo el modelo del cálculo lógico-matemático, como elementos formales al edificio matemático.

Los axiomas, las fórmulas y las demostraciones de que este edificio formal consiste son precisamente lo que antes, en la construcción de la teoría elemental de los números que hemos descrito, eran los numerales. Es precisamente a partir de aquí, al igual que ocurre con los numerales en la teoría de números, que podemos efectuar consideraciones concretas, esto es, poner en práctica el pensamiento real.

Los argumentos y las consideraciones concretas que, por supuesto, no son nunca del todo prescindibles, son trasladados a otro sitio, a un nivel superior. Con ello se hace posible en las matemáticas trazar una línea de demarcación estricta y sistemática entre las fórmulas y las demostraciones formales, por una parte, y los argumentos y consideraciones concretas, por la otra.

En lo que sigue, intentaremos mostrar cómo es que estas ideas pueden ser llevadas a la práctica de manera estricta e irreprochable. Como es claro, con ello habremos resuelto también nuestro problema original, esto es, el problema de ofrecer una demostración de la consistencia de los axiomas de la aritmética y el análisis.

Para la teoría concreta [inhaltlich-konkret] de los números resultan suficientes, como hemos visto, los signos 1 y +. Para la obtención de la totalidad de las matemáticas introduciremos distintos tipos de signos.

I. *Signos individuales* (generalmente letras griegas)

1. 1, + (constituyentes de los numerales)
2. $\varphi(*), \psi(*), \sigma(*,*), \delta(*,*), \mu(*,*)$
   (funciones de individuos con un lugar vacio, funciones de funciones de individuos)
3. = (igualdad), ≠ (desigualdad), > (mayor que)
   (signos matemáticos)
4. Z (ser un número), Φ (ser una función)
5. → ("implicación", un signo lógico)
6. ( ) (cuantificación universal)

II. *Variables* (letras latinas)

1. $a, b, c, d, p, q, r, s, t$ (variables primitivas)
2. $f(*), g(*)$ (variables funcionales, variables de función de función)
3. $A, B, C, D, S, T, U, V, W$ (variables para fórmulas)

III. *Signos para la comunicación* (letras góticas)

1. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ (funcionales)
2. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ (fórmulas).

Aclaremos antes que nada el manejo de estos signos.

Los signos yuxtapuestos forman una *cadena* [Zeile][4]; un complejo de cadenas se llama *figura*.

Los signos individuales (I) y las variables (II) son los únicos que forman parte del cálculo y que constituyen la estructura formal propiamente dicha. Los signos de la última clase (III) sirven únicamente para la comunicación al argumentar, así como para consideraciones concretas de cualquier tipo.

Seguiremos aquí la costumbre de utilizar siempre letras griegas para signos individuales (I), latinas para las variables (II) y góticas para los signos de comunicación (III).

Los signos para la comunicación (III) se utilizan en ocasiones, provisionalmente, como *signos de abreviación*. Por supuesto, un signo de abreviación no es más que un signo que sirve para una escritura condensada y que *denota* [bedeutet] otro signo definido. Debemos tener siempre presente, sin embargo, que la introducción de signos de abreviación en la construcción de las matemáticas es algo prescindible en principio. En realidad, los signos de la clase (III) resultan necesarios únicamente para la comunicación en un sentido estricto, es decir, en la operación concreta de las demostraciones formales.

Una *funcional* es ya sea un numeral, una variable primitiva, una función individual o una función variable [variable Funktion] cuyos lugares libres han sido llenados con numerales, variables primitivas o

[4] Literalmente: una hilera. [N. de T.]

funciones[5]. Llamamos tambien funcional a una función de función individual o variable con lugares llenos. Una funcional puede siempre, ella misma, ser colocada en el lugar libre correspondiente. Si los lugares de una función o de una función de función se han llenado en su totalidad con funcionales, la cadena resultante es nuevamente una funcional. Así, una funcional es siempre un signo complejo formado por signos de I.1, I.2, II.1 y II.2, pero que no contiene signos de las clases I.3-I.6, ni II.3.

Si a ambos lados del signo = ó del signo ≠ colocamos una funcional, la cadena que se obtiene se llama *fórmula elemental* [Primformel]. Se obtiene también una fórmula de este tipo cuando en el lugar del signo Z se coloca una funcional. En general, si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ denotan funcionales,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$$

$$Z(\mathfrak{a})$$

son también fórmulas elementales.

Si a ambos lados del signo lógico de implicación colocamos una fórmula elemental o una fórmula variable (II.3), obtenemos una *fórmula de implicación*. Si a cada lado del signo de implicación escribimos una fórmula elemental, variable o de implicación, la cadena que se obtiene es también una *fórmula*. En general,

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

es una fórmula si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fórmulas variables o fórmulas que previamente habían sido obtenidas.

A ciertas fórmulas que sirven como cimiento del edificio formal de las matemáticas se les conoce como *axiomas*.

El manejo de los axiomas debera sujetarse a las siguientes reglas.

Los signos individuales no pueden ser objeto de un reemplazo; las variables primitivas pueden ser reemplazadas por cualquier funcional[6].

---

[5] Según Bernays, todas estas estipulaciones pueden precisarse con ayuda del concepto de *especie* [Gattung]. En tal caso, todo lugar debe referirse a una especie determinada. [N. de T.]

[6] Bernays observa aquí que este sería el punto en el que habría que introducir la regla de sustitución para las variables de fórmulas [Formelvariablen]. *Cfr.* D. Hilbert y P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I, 4, pp. 89 *ss.* y 98. [N. de T.]

El uso de paréntesis es común, esto es, para separar partes de signos, para indicar lugares libres, para seguridad y univocidad en la sustitución de cadenas.

El signo de cuantificación universal, un paréntesis izquierdo y uno derecho con una variable entre ambos, I.6, es también un signo lógico. El segmento de fórmula que sigue al cuantificador y que, en general, contiene esa variable se delimita por medio de un paréntesis especial que indica claramente el alcance del cuantificador.

Para el signo de cuantificación deberán observarse las siguientes reglas.

Una variable en una fórmula se encuentra *libre* si no se encuentra en un signo de cuantificación en esa fórmula. Podemos siempre anteponer a una fórmula un signo de cuantificación con una variable libre; la totalidad de esa fórmula constituye entonces el alcance de ese cuantificador. Por el contrario, podemos prescindir de un signo de cuantificación cuyo alcance es el resto de la fórmula.

Una variable que se encuentra dentro de un signo de cuantificación puede ser reemplazada en ese sitio y en la fórmula afectada por ese cuantificador por cualquier otra variable que no aparezca en esa fórmula.

Dos signos de cuantificación yuxtapuestos y con el mismo alcance pueden intercambiarse entre sí.

Si

$$(b)(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(b))$$

es parte de una fórmula y en $\mathfrak{A}$ no aparece la variable b, entonces (b) puede colocarse después del signo $\rightarrow$, obteniéndose

$$\mathfrak{A} \rightarrow (b)\mathfrak{B}(b).$$

Ahora mostraremos cómo pueden obtenerse los teoremas relativos a las operaciones elementales a partir de este nuevo enfoque formal. Para este fin, necesitamos de una lista de axiomas.

1. $a = a$
2. $1 + (a + 1) = (1 + a) + 1,$
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1,$
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b,$
5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b).$

y del esquema de inferencia

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}.$$

Las demostraciones formales para las ecuaciones numéricas pueden entonces realizarse como en el ejemplo que a continuación ofrecemos.

Del axioma 1 obtenemos por sustitución

$$1 = 1 ,$$

y también, utilizando las abreviaturas 2 para 1+1 y 3 para 2+1

$$2 = 2 \tag{1}$$

y

$$3 = 3 . \tag{2}$$

A partir del axioma 2 resulta por sustitución

$$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 ,$$

o sea,

$$1 + 2 = 2 + 1 ,$$

o, equivalentemente,

$$1 + 2 = 3 \tag{3}$$

Con el axioma 5 llegamos también a

$$3 = 3 \rightarrow (1 + 2 = 3 \rightarrow 3 = 1 + 2) ,$$

y al esquema

$$1 + 2 = 3 \rightarrow 3 = 1 + 2 ,$$

y, finalmente, por (3) y el esquema de inferencia, a

$$3 = 1 + 2 .$$

Con ello queda establecido el carácter demostrable de esta fórmula a partir de nuestros axiomas.

Los axiomas de que disponemos son insuficientes para obtener todas las fórmulas que necesitamos. Se abre entonces la posibilidad de añadir otros axiomas a nuestra lista para lograr este objetivo. Antes de esto, es necesario explicitar lo que es una demostración, así como establecer indicaciones precisas acerca del uso de los axiomas.

Una *demostración* es una figura que se presenta ante nosotros de manera intuitiva. Una demostración consta de inferencias justificadas por el esquema

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}},$$

donde cada una de las premisas, esto es, de las fórmulas $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}$ es un axioma (es decir, se obtuvo directamente de un axioma por sustitución) o coincide con la *fórmula final* de una inferencia previa en la demostración, o bien resulta de una fórmula final por sustitución.

Una fórmula es *demostrable* si es un axioma, se obtiene de un axioma por sustitución, es la fórmula final de una demostración o resulta de una fórmula final de una demostración por sustitución.

Esto implica que tenemos que entender el concepto de demostrabilidad como algo relativo al sistema axiomático que se tome como base. Pero este relativismo resulta, en realidad, bastante natural y, además, necesario. Tomarlo así no perjudica en forma alguna, pues el sistema se extiende constantemente y la construcción formal resulta cada vez más completa, en consonancia con la tendencia constructivista que nos hemos propuesto.

Hemos dicho ya que para realizar nuestros objetivos tenemos que hacer de las demostraciones mismas el objeto de nuestra investigación. Nos vemos así obligados a desarrrollar una *teoría de la demostración*, cuya materia de estudio la constituye el manejo y la operación de las demostraciones mismas.

Para la teoría intuitiva y concreta [konkret-anschaulich] de los números que hemos expuesto antes son los números los que constituyen lo objetivo y ostensivo, mientras que las demostraciones de los teoremas numéricos caen ya en el ámbito del pensamiento [gedanklich]. En nuestra investigación presente, la demostración misma se convierte en algo concreto y ostensivo, las consideraciones y la argumentación concretas no tienen lugar sino a partir de la demostración. Así como el físico examina sus aparatos, el astrónomo su punto de referencia y el filósofo lleva a cabo una crítica de la razón, también el matemático se ve obligado a asegurar sus teoremas, y para ello requiere de una teoría de la demostración.

Recordemos que nuestro objetivo primario es ofrecer una prueba de consistencia. En realidad, desde nuestro punto de vista actual este problema carece, en rigor, de sentido, puesto que lo único de que disponemos son fórmulas "demostrables" que, de cierta manera, equivalen exclusivamente a afirmaciones positivas, por lo que no pueden nunca dar lugar a una contradicción. Podríamos aceptar, aparte de $1 = 1$, $1 = 1 + 1$ como fórmula, con tal de que ésta se estableciera como una fórmula demostrable por medio de las reglas de inferencia.

Ahora bien, si nuestro formalismo ha de constituir un verdadero sustituto para la teoría real original (que consistía de inferencias y afirmaciones), también una contradicción concreta debe tener su contraparte formal. Para que esto sea así, debemos aceptar, además de la igualdad, la desigualdad. Y como ocurría con aquélla, ésta debe ser tomada en cierto sentido como un enunciado positivo e introducirse por medio del signo $\neq$, añadiendo nuevos axiomas.

Por supuesto estos axiomas se sujetarán a las reglas que para ellos hemos introducido anteriormente. Podemos decir ahora que un sistema axiomático es *consistente* si en él no podemos nunca obtener como fórmulas demostrables

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ y } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b},$$

donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son funcionales.

Tomando esto en cuenta, introducimos ahora un nuevo axioma

6. $a + 1 \neq 1$,

prescindiendo al mismo tiempo, en aras de la sencillez, del axioma 2.

El primer paso que tenemos entonces que dar para establecer el resultado de consistencia que nos interesa para nuestra nueva teoría de la demostración consiste en probar el siguiente teorema.

El sistema axiomático que consta de

1. $a = a$
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$,
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$,

5. $a = c \to (b = c \to a = b)$,

6. $a + 1 \neq 1$,

como axiomas es consistente.

La demostración consta de varios pasos.

LEMA. Una fórmula demostrable puede contener el signo $\to$ dos veces como máximo.

Supongamos que se nos presenta una demostración de una fórmula en la que $\to$ aparece más de dos veces. Existe entonces en nuestra prueba una primera fórmula con esta propiedad, no existiendo una fórmula anterior a la misma que contenga ese signo más de dos ocasiones. Ahora bien, esta fórmula no pudo obtenerse por sustitución en un axioma, puesto que lo único que puede ponerse en lugar de a, b, c son funcionales que no involucran el signo de implicación $\to$. Pero tampoco pudo haberse obtenido como fórmula final $\mathfrak{T}$ de una inferencia. De ser así, la segunda premisa de tal inferencia tendría que haber sido $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ y en ésta, el signo $\to$ aparecería más de dos ocasiones, lo que contradiría la descripción de $\mathfrak{T}$.

Demostremos también el siguiente

LEMA. Una fórmula $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ es demostrable sólo si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son el mismo signo.

Distinguiremos nuevamente los dos casos posibles. En el primero, la fórmula se obtiene directamente por sustitución en un axioma. El único principio de este tipo que pudo haberse utilizado es el axioma 1, en cuyo caso el lema resulta evidente.

Supongamos ahora que se nos presenta una demostración con $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ como fórmula final y que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ no son el mismo signo. Supongamos, además, que anteriormente en la misma demostración no aparece otra fórmula con esta propiedad. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ tendría que coincidir con $\mathfrak{T}$, mientras que $\mathfrak{S}$ tendría que ser una fórmula demostrable. La segunda premisa debe tener entonces la forma

(4) $$\mathfrak{S} \to \mathfrak{a} = \mathfrak{b} .$$

Esta fórmula tendría que haberse obtenido o bien por sustitución en un axioma, o como fórmula final de una demostración. En el primer caso, los axiomas 3 y 4 serían los únicos que podrían haber intervenido. Si el axioma utilizado es el 3, $\mathfrak{a}$ tendría que ser de la forma $\mathfrak{a}' + 1$ y $\mathfrak{b}$ de la forma $\mathfrak{b}' + 1$, al tiempo que $\mathfrak{S}$ tendría que ser la fórmula $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$. Sin embargo, si $\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{b}'$ son los mismos signos, lo mismo debe ocurrir con

$\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ (en contradicción con lo que habíamos supuesto). Si $\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{b}'$ no fueran el mismo signo, entonces $\mathfrak{S}$, esto es $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$ sería una fórmula que aparecería en la demostración antes que $\mathfrak{T}$ y tendría la propiedad que caracterizaba a ésta última, lo que es imposible.

Si el axioma utilizado fue el 4, la fórmula $\mathfrak{S}$ tendría que ser de la forma $\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{b} + 1$, en la que no podrían aparecer a ambos lados del signo de igualdad los mismos signos. Pero, nuevamente, esto es imposible debido a que $\mathfrak{S}$ aparece primero en la demostración.

La única posibilidad que resta es que (4) sea la fórmula final de una demostración cuya última inferencia es de la forma

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b})\end{array}}{\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}}$$

Examinemos el origen de su segunda premisa, esto es, de

(5) $$\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}).$$

Si esta fórmula se hubiera obtenido por sustitución en un axioma, el único en cuestión sería el axioma 5, por lo que $\mathfrak{S}$ tendría que ser de la forma $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{A}$ de la forma $\mathfrak{a} = \mathfrak{t}$. Si $\mathfrak{t}$ es lo mismo que $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}$ no podría ser sino $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, por lo que esta fórmula tendría que aparecer en la demostración en un lugar previo al que hemos supuesto.

Si $\mathfrak{t}$ no es igual a $\mathfrak{b}$, entonces la fórmula $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ tiene la propiedad que habíamos supuesto originalmente para $\mathfrak{T}$ y aparece, además, antes que ésta en la demostración.

Por lo tanto, la única posibilidad que nos queda es que (5) sea la fórmula final de una inferencia. Pero entonces la segunda de las premisas que interviene en ella debe ser una fórmula en la que aparece por lo menos en tres ocasiones el signo de implicación, lo que signfica, de acuerdo con el lema anterior, que esta fórmula no es demostrable.

Con ello hemos establecido también el segundo de nuestros lemas.

Dijimos antes que un sistema axiomático es consistente si en él no es posible demostrar a la vez

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ y } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}.$$

Ahora bien, como según nuestros lemas, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ es un teorema sólo si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son el mismo signo, la demostración de la consistencia de nuestros axiomas equivale a mostrar que a partir de ellos no podremos nunca obtener como teorema, como fórmula demostrable, una fórmula de la forma

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a} \tag{6}$$

Para hacer ver esto procederemos como sigue. Para obtener directamente por sustitución en los axiomas una fórmula de la forma (6) (que contiene el signo $\neq$), sería necesario hacer uso del axioma 6. Pero toda fórmula que resulte a partir de este principio por sustitución es siempre de la forma

$$\mathfrak{a}' + 1 \neq 1\,,$$

donde ciertamente $\mathfrak{a}' + 1$ no es el mismo signo que 1.

Por otra parte, si (6) se presentara como la fórmula final de una inferencia, la segunda premisa de la misma tendría que ser de la forma

$$\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a} \tag{7}$$

(7) no pudo haberse obtenido directamente por sustitución en un axioma, es decir, necesariamente debió ser obtenida por medio de una inferencia. La segunda premisa de ésta sería entonces

$$\mathfrak{T} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a})\,,$$

una fórmula que, por razones similares, debe surgir de una inferencia cuya segunda premisa es necesariamente de la forma

$$\mathfrak{U} \rightarrow (\mathfrak{T} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}))\,.$$

Esta fórmula no es demostrable de acuerdo con nuestro primer lema. Pero ello implica también la imposibilidad de que (6) sea un teorema. Esto completa la demostración de la consistencia del sistema constituido por los axiomas

1. $a = a$
2. $1 + (a + 1) = (1 + a) + 1\,,$
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1\,,$
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b\,,$
5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)\,,$
6. $a + 1 \neq 1\,.$

Hasta ahora no hemos introducido ningún signo lógico aparte de $\rightarrow$. En particular, hemos tenido especial cuidado en evitar la formalización de la operación lógica de la *negación*. Esta es una característica de nuestra teoría de la demostración. La única equivalencia formal para la negación está representada por el signo $\neq$. En cierto sentido, su introducción hace posible una expresión y un tratamiento positivos de la desigualdad, en analogía con la igualdad, cuya contraparte, en realidad, representa.

Desde el punto de vista concreto, la negación se utiliza exclusivamente en la prueba de la consistencia del sistema y, de hecho, solamente en la medida en que coincide con nuestra concepción básica. Ello pondría de manifiesto que nuestra teoría de la demostración tiene también importantes consecuencias epistemológicas, al permitirnos una visión más profunda del significado y la naturaleza de la negación.

El concepto *todos*, como un concepto lógico, está presente en nuestra teoría en virtud tanto de las variables que en ella existen como de las reglas que hemos estipulado para su operación y la del cuantificador.

Una noción lógica que aún tiene que ser formalizada es la de *existe*. Como es bien sabido, en la lógica formal este concepto se expresa recurriendo a la negación y a la idea de totalidad ("*todos*"). Como nuestra teoría carece de una representación directa de la negación, la formalización de existencia, "existe", se logra introduciendo signos de función individuales por medio de una especie de definición implícita, esto es, produciendo realmente, por así decirlo, "lo que existe". El ejemplo más sencillo de ello es el siguiente.

Para expresar la proposición:

Si $\mathfrak{a}$ no es igual a 1, *existe* un número anterior a $\mathfrak{a}$.

Introducimos como signo individual el signo de función $\delta(*)$ de un lugar y añadimos como otro de nuestros axiomas la fórmula

$$7. \quad a \neq 1 \rightarrow a = \delta(a) + 1 .$$[7]

Es posible demostrar nuevamente, aunque aquí sólo nos limitaremos a mencionarlo, recurriendo a una argumentación concreta, que el sistema de los axiomas 1-7 es consistente.

Aunque las reflexiones que hemos expuesto constituyen apenas la parte más elemental de la teoría de la demostración, la tendencia general

[7] *Cfr.* el artículo "Acerca del concepto de número" [Cap. I del presente volumen].

de la misma, es decir, la dirección en la que ha de buscarse una nueva fundamentación de las matemáticas es bastante clara. Es importante, sin embargo, destacar dos puntos.

Primero. Todo aquello que hasta ahora ha constituido a las matemáticas reales se convierte en objeto de una formalización estricta; las *matemáticas reales*, esto es, las matemáticas en un sentido estricto, se convierten de esa manera en un conjunto de fórmulas demostrables.

Las fórmulas de este conjunto se distinguen de las fórmulas usuales de las matemáticas solamente por el hecho de que, además de los signos matemáticos, contienen el signo $\rightarrow$, el cuantificador universal y los signos para enunciados.

Esto corresponde a una idea que hemos venido sosteniendo desde hace mucho tiempo. En otras palabras, debido al estrecho vínculo y al carácter indisoluble de las verdades aritméticas y lógicas resulta necesario llevar a cabo una construcción simultánea de la aritmética y de la lógica formal.

Segundo. A esta matemática real debe añadirse una nueva matemática, una *metamatemática*, cuya función es asegurar a la primera, protegiéndola tanto del terror de las prohibiciones innecesarias como de la preocupación de las paradojas. En contraposición a los principios deductivos puramente formales de las matemáticas reales, en la metamatemática se utiliza la inferencia concreta, por ejemplo, para el establecimiento de la consistencia de los axiomas.

De acuerdo con esto, el desarrollo de las matemáticas tiene lugar mediante la alternación constante de dos niveles. En primer término, obteniendo nuevos *teoremas*, esto es, nuevas fórmulas demostrables a partir de los axiomas, por medio de la inferencia formal; en segundo, añadiendo nuevos axiomas junto con la prueba de su consistencia mediante una argumentación concreta.

Ocupémonos ahora de ofrecer una nueva fundamentación de las matemáticas que sea acorde tanto a los principios que hemos establecido como a las tendencias que hemos caracterizado.

Nuestro conjunto de axiomas ha estado constituido hasta ahora solamente por los axiomas 1-7. Todos estos principios son de carácter puramente aritmético. Sin embargo, los teoremas que resultan de ellos no ofrecen todavía un fundamento suficiente para la teoría de los números reales y, de hecho, constituyen tan sólo una pequeña porción de las matemáticas.

Recordemos que en los axiomas 1-7 únicamente aparecen variables primitivas, esto es, letras latinas minúsculas sin lugares vacíos. Pero la fundamentación de la aritmética requiere de una serie de axiomas con variables relativas a fórmulas —letras latinas mayúsculas. Teniendo esto en mente, introduciremos en primer lugar los otros axiomas aritméticos, cada uno con una variable relativa a fórmulas.

Axioma de la igualdad matemática

8. $a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$.

Axioma de la inducción completa

9. $(a)(A(a) \rightarrow A(a+1))$
$\rightarrow \{A(1) \rightarrow (Z(b) \rightarrow A(b))\}$

Además de 8 y 9 necesitamos los axiomas correspondientes a los principios deductivos lógicos. Los axiomas 10-13 que ahora introduciremos tienen precisamente esa función.

Axioma de la inferencia lógica

10. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,
11. $\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B)$,
12. $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}$,
13. $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$.

Nuestros siguientes axiomas se refieren a la desigualdad matemática. Podemos servirnos de ellos como de algo equivalente a ciertos principios deductivos que resultan imprescindibles para la argumentación concreta.

Axioma de la desigualdad matemática

14. $a \neq a \rightarrow A$,
15. $(a = b \rightarrow A) \rightarrow \{(a \neq b \rightarrow A) \rightarrow A\}$.

Hemos dicho ya que los principios 1-7 constituyen tan sólo una parte de los axiomas aritméticos que necesitamos para nuestra construcción. Para completarlos se requiere sobre todo de la introducción del signo lógico de función Z (ser entero racional positivo). Por otra parte, se hace también necesaria una restricción del axioma 6. Al mismo tiempo, al utilizar el signo $*$-1 en lugar del signo de función $\delta(*)$, generalizando y complementando respectivamente los axiomas 2 y 7 y eliminando los axiomas 3, 4 y 5, que se convierten ahora en teoremas, llegamos a un sistema que consta de los siguientes 8 principios en lugar de los anteriores axiomas 2-7.

Axiomas aritméticos

16. $Z(1)$,
17. $Z(a) \to Z(a+1)$,
18. $Z(a) \to (a \neq 1 \to Z(a-1))$,
19. $Z(a) \to (a+1 \neq 1)$,
20. $(a+1)-1=a$,
21. $(a-1)+1=a$,
22. $a+(b+1)=(a+b)+1$,
23. $a-(b+1)=(a-b)-1$.

Un sistema conformado de esta manera, es decir, un sistema que conste de los axiomas 1,8-23 permite establecer, mediante la simple aplicación de las reglas que hemos expuesto, esto es, formalmente, la totalidad de las fórmulas y teoremas de la aritméticas.

Nuestro primer objetivo en relación a este sistema es encontrar una prueba de consistencia para los axiomas 1, 8-23. De hecho, la demostración es posible, con lo que resulta asegurado[8] el principio deductivo expresado en la inducción completa (axioma 9), de capital importancia en la aritmética.

El paso esencial, es decir, la demostración de la aplicabilidad del principio lógico del tercero excluido a totalidades infinitas de números, funciones o funciones de funciones para inferir que una afirmación es válida para todos esos números, todas esas funciones o todas esas funciones de funciones , o que necesariamente existe entre estos objetos uno (un número, una función o una función de funciones) para el que la afirmación resulta falsa, constituye, sin embargo, una tarea inconclusa.

Sólo mediante la demostración de la aplicabilidad de este principio es posible una fundamentación satisfactoria de la teoría de los números

---

[8] Bernays dice que se ha demostrardo que esta prueba sólo puede darse si se excluye en cuantificador y la sustitución del axioma 9 por el esquema de inducción. [N. de T.]

reales y sólo ella puede allanar la vía que conduce al análisis y la teoría de conjuntos.

Esta demostración puede llevarse a cabo conforme a las ideas básicas que acabamos de exponer, introduciendo ciertas funciones de funciones τ y α por medio de la postulación de axiomas y la demostración de la consistencia de los mismos.

El ejemplo más sencillo de una función de funciones útil a los fines que acabamos de expones es el de $\kappa(f)$, donde el argumento f es una función numérica variable de la variable primitiva a, de tal suerte que podemos afirmar

$$Z(a) \to \{f(a) \neq 1 - 1 \to Z(f(a))\}$$

donde $\kappa(f) = 1 - 1$, en caso de que f tenga el valor 1 para toda a, y $\kappa(f)$ sea el menor entero que pueda ser un argumento, en caso contrario.

Los axiomas para esta $\kappa(f)$ son entonces

24. $(\kappa(f) = 1 - 1) \to (Z(a) \to f(a) = 1)$,
25. $(\kappa(f) \neq 1 - 1) \to Z\kappa(f)$,
26. $(\kappa(f) \neq 1 - 1) \to (f(\kappa(f)) \neq 1)$,
27. $Za \to \{Z(\kappa(f) - a) \to f(\kappa(f) - a) = 1\}$

De manera similar podemos introducir una cierta pareja de funciones afines τ y α. Con ellas resulta posible una fundamentación completa de la teoría de los números reales, lo mismo que una demostración de la existencia de una cota superior para cualquier conjunto de números reales.

Deseamos concluir esta primera comunicación mencionando con agradecimiento a Paul Bernays, cuyo apoyo y colaboración han sido esenciales para la realización y el desarrollo de las ideas que aquí hemos expuesto.