Los fundamentos lógicos de las matemáticas

Mis investigaciones acerca de los nuevos fundamentos de las matemáticas[1] tienen como propósito principal eliminar de manera definitiva cualquier duda en relación a la confiabilidad de la inferencia matemática. La necesidad de una investigación de este tipo se nos hace patente cuando observamos cuán diversas e imprecisas son las ideas que han surgido en torno de esta problemática, inclusive las formuladas por algunos de los más notables matemáticos. Recordemos también que ciertas conclusiones e inferencias tenidas entre las más seguras han sido rechazadas por algunos de los matemáticos más prestigiados de los últimos tiempos.

Una solución completa de estas dificultades de principio requiere de una teoría cuyo objeto de estudio sea la demostración matemática misma. Gracias a la valiosa y eficaz colaboración de Paul Bernays he logrado desarrollar una *teoría de la demostración*, de tal manera que, con ella resulta posible una fundamentación satisfactoria del análisis y de la teoría de conjuntos.

Más aún, creo que mis análisis me han llevado al punto de poder afirmar que también los problemas clásicos de la teoría de conjuntos, como el problema del continuo y otros de igual importancia abiertos en la lógica matemática, pueden atacarse provechosamente con mi teoría.

No es posible hacer en este lugar una exposición en detalle de la teoría con sus largos y penosos desarrollos. Sin embargo, el curso mismo de nuestra investigación ha permitido el surgimiento de una serie de

---

[1] *Cfr.* las conferencias sustentadas por el autor en Copenhage y Hamburgo, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1922 [Cap. III del presente volumen].

nuevas ideas, conexiones y dificultades que por sí mismas merecen nuestra atención. Me propongo discutir aquí uno de estos problemas, uno que, por lo demás, toca profundamente el núcleo mismo de mi teoría de la demostración.

Recordemos, en primer término, el axioma de elección. Este principio fue expuesto y formulado inicialmente por Zermelo quien basándose en él ha logrado ofrecer una genial demostración del buen orden del continuo[2]. Las objeciones que se han hecho en contra de esta prueba y en relación a los desarrollos dependientes de ella en la teoría de conjuntos se refieren fundamentalmente al principio de elección. En nuestros días es todavía muy frecuente poner en duda la validez del axioma de elección, aceptando al mismo tiempo el resto de los principios deductivos que son usuales en la teoría de conjuntos en general y en las demostraciones de Zermelo en particular.

En mi opinión, esta actitud es equivocada. El análisis lógico, tal y como éste se lleva a cabo en mi teoría, muestra que la idea fundamental que subyace al axioma de elección es un principio lógico general que resulta necesario e indispensable, inclusive para las cuestiones más elementales de la deducción matemática. Si logramos dar una base firme a estos primeros pasos tendremos también preparado el terreno para el axioma de elección. Mi teoría de la demostración permite ambas cosas.

La idea fundamental de mi teoría de la demostración es la siguiente: Todo lo que hasta ahora ha formado parte de las matemáticas se formaliza de manera estricta, de tal manera que la matemática real o la matemática en un sentido estricto [in engerem Sinne] se convierte en un conjunto de fórmulas. Éstas se diferencian de las fórmulas normales en las matemáticas solamente en que, además de los signos usuales, contienen también signos lógicos, en particular signos para la implicación ($\rightarrow$) y para la negación ($\bar{}$)[3].

Ciertas fórmulas que sirven como base para el edificio formal de las matemáticas se llaman axiomas. Una demostración es una figura que debe

---

[2] E. Zermelo, "Beweis, daß jede Menge Wohlgeordnet werden kann", *Mathematische Annalen* 59, 1904. [N. de T.]

[3] En el escrito antes mencionado se evita este símbolo. No obstante, la exposición presente difiere ligeramente de la que se da en aquél y en ella el símbolo de negación no representa peligro alguno.

presentarse ante nosotros como algo intuitivo y consiste de inferencias realizadas conforme al esquema

$$\frac{\mathfrak{S} \qquad \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

donde en cada caso las premisas; esto es, cada una de las fórmulas correspondientes a $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ es, o bien un axioma, o se obtuvo por sustitución en un axioma, o bien coincide con la fórmula final $\mathfrak{T}$ de una inferencia cuyas premisas aparecen ya en la demostración, o por sustitución en esa fórmula final.

Una fórmula es demostrable si es o bien un axioma, o se obtuvo por sustitución de un axioma o cuando es la fórmula final de una demostración.

A la matemática real [eigentlich] así formalizada se añade una especie de nueva matemática, una metamatemática, necesaria para salvaguardar aquélla y en la que, en contraposición a los modos puramente formales de inferencia de la matemática real, la inferencia concreta es utilizada, pero únicamente para la prueba de consistencia de los axiomas. La metamatemática trabaja con las demostraciones de la matemática real y, en realidad, éstas constituyen su objeto de investigación.

Las matemáticas en general se desarrollan entonces por medio de una transición constante en dos sentidos: por una parte, obteniendo a partir de los axiomas nuevas fórmulas demostrables por medio de la inferencia formal; y, por la otra, añadiendo nuevos axiomas junto con la prueba de su consistencia por medio de inferencias concretas.

Los axiomas y teoremas, esto es, las fórmulas que surgen en estas transformaciones, son las representaciones [Abbilder] de las ideas que constituyen los procedimientos utilizados hasta ahora en las matemáticas, sin constituir ellos mismos verdades en un sentido absoluto. Como verdades absolutas han de considerarse más bien los resultados relativos a la demostrabilidad y a la consistencia de esos sistemas de fórmulas que se obtienen gracias a mi teoría de la demostración.

Este programa determina nuestra elección de axiomas para la teoría de la demostración. La lista de nuestros axiomas comienza con los siguientes:

I. Axiomas de la implicación

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(adición de una suposición)

2. $\{ A \rightarrow (A \rightarrow B) \} \rightarrow (A \rightarrow B)$
(supresión de suposiciones)

3. $\{ A \rightarrow (B \rightarrow C) \} \rightarrow \{ B \rightarrow (A \rightarrow C) \}$
(intercambio de suposiciones)

4. $(B \rightarrow C) \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \}$
(eliminación de proposiciones)

II. Axiomas de la negación

5. $A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$
(ley de la contradicción)

6. $(A \rightarrow B) \rightarrow \{ (\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B \}$
(principio del tercero excluido)

III. Axiomas de la igualdad

7. $a = a$

8. $a = b \rightarrow (A (a) \rightarrow A (b))$

IV. Axiomas numéricos

9. $a + 1 \neq 0$.

10. $\delta (a + 1) = a$

En relación a 9 es necesario tener presente que la negación formal de $a = b$, se escribe también $a \neq b$, y que, además, $a + 1 \neq 0$ es la negación formal de $a + 1 = 0$.

Con base en los axiomas 1-10 es fácil obtener todos los números enteros positivos, lo mismo que las ecuaciones numéricas válidas que a ellos se refieren. A partir de estas bases y haciendo uso de una lógica "finitista" al realizar consideraciones puramente intuitivas (entre las que, sin duda, hay que contar a la recursión y a la inducción intuitiva para totalidades finitas), es posible obtener la teoría elemental de los núme-

ros[4], sin que para ello se tenga que recurrir a modos de inferencia dudosos o de alguna manera problemáticos.

Los teoremas obtenidos de acuerdo con este punto de vista tienen, todos ellos, un carácter finitista. Es decir, puede llegarse concretamente [inhaltlich] a los pensamientos que representan, sin recurrir a ningún axioma, considerando solamente totalidades finitas.

Pero en la teoría de la demostración queremos, además, ir más allá de la esfera de la lógica finitaria y obtener aquellos teoremas que representan a los teoremas transfinitos de la matemática usual. En nuestra opinión, la verdadera fuerza y validez de la teoría de la demostración se pone de manifiesto precisamente porque con ella nos resulta posible dar una prueba de consistencia, una vez que hemos aceptado ciertos axiomas adicionales de carácter transfinito.

¿En qué momento se trasciende por primera ocasión la esfera de lo intuitivo y finito? Evidentemente, cuando nos servimos de los conceptos "*todo*" y "*existe*". Lo característico de estos conceptos es lo siguiente. La afirmación de que *todos* los objetos de una totalidad finita dada de la que se puede tener una visión completa poseen una cierta propiedad es equivalente a la yuxtaposición de varios enunciados particulares por medio de la palabra "y". Afirmar que todos los asientos de este auditorio son de madera equivale a decir: este asiento es de madera y ese asiento es de madera y ... y el asiento de allá es de madera.

De manera análoga, la afirmación de que en una totalidad finita *existe* un objeto con una cierta propiedad es equivalente a una composición de enunciados particulares por medio de la palabra "o". Por ejemplo, el enunciado de que entre estos gises hay uno rojo equivale a decir: este gis es rojo o ese gis es rojo o...o el gis de allá es rojo.

Con base en lo anterior podemos concluir la validez de la siguiente versión del principio del *tertium non datur* para totalidades finitas: o bien todos los objetos poseen una cierta propiedad, o bien existe entre ellos uno que no la posee. Al mismo tiempo, utilizando los signos corrientes de cuantificación universal y existencial —"para toda a": (a); no para toda a: $(\bar{a})$ "existe una a": $(\mathsf{E}a)$; "no existe ninguna a": $(\bar{\mathsf{E}}a)$— obtenemos la validez estricta de las equivalencias

---

[4] En la exposición definitiva de nuestra teoría, la fundamentación de la teoría elemental de los números se da también por medio de axiomas. Por razones de brevedad nos referiremos aquí a la fundamentación intuitiva directa.

$$(\bar{a})A(a) \quad \text{eq.} \quad (\mathsf{E}a)\bar{A}$$

y de

$$(\overline{\mathsf{E}a})A(a) \quad \text{eq.} \quad (a)\bar{A}(a)$$

donde $A(a)$ representa un enunciado con una variable a, esto es, un predicado.

Ahora bien, es usual en las matemáticas suponer sin más la validez de estas equivalencias, inclusive cuando se habla de totalidades infinitas de individuos. Con ello, sin embargo, hemos abandonado el terreno de lo finito, adentrándonos en la esfera de los modos de las inferencias transfinitas.

Por lo demás, cuando en la esfera de lo infinito utilizamos sin reparos de ninguna índole un procedimiento válido en el terreno de lo finito, lo que estamos haciendo es, en realidad, abrir de par en par las puertas para que en nuestras consideraciones se deslicen errores. De hecho, aquí interviene la misma fuente de errores que nos es familiar en el análisis: así como allí la transposición de los teoremas válidos para sumas y productos finitos es lícita para sumas y productos infinitos sólo cuando una inspección sobre la convergencia garantiza las inferencias, las sumas y los productos lógicos infinitos

$$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_3 \,\&\, \ldots ,$$

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots ,$$

no deben ser tratados como si fueran finitos, a no ser que la teoría de la demostración lo permita.

Consideremos las equivalencias que hemos establecido un poco antes. Cuando se considera una infinidad de objetos, ni la negación del juicio general $(a)Aa$ ni la negación del juicio existencial $(\mathsf{E}a)Aa$ tienen, en principio, un contenido preciso. En ocasiones, sin embargo, pueden adquirir un sentido, por ejemplo, cuando la afirmación $(a)Aa$ es contradicha por un contraejemplo, o cuando a partir de la suposición $(a)Aa$ o de $(\mathsf{E}a)Aa$ se deriva una contradicción. Sin embargo, estos casos no se oponen por contradicción, pues aunque $A(a)$ no sea válido para toda a, todavía no sabemos que realmente haya un objeto con la propiedad $\bar{A}$. Por razones análogas, tampoco podemos decir sin más que o bien $(a)Aa$ es válido, o bien que $(\mathsf{E}a)Aa$ lo es, o bien que estas afirmaciones exhiben realmente una contradicción. Las expresiones "hay" [es gibt] y "*se presenta, aparece*" [es liegt vor] tienen

obviamente el mismo significado cuando se habla de totalidades finitas. En relación a totalidades infinitas solamente el segundo de estos conceptos tiene cierta claridad.

Vemos así que para los propósitos de una fundamentación estricta de las matemáticas, los modos de inferencia usuales en el Análisis ciertamente no pueden suponerse como algo lógicamente evidente. Más bien, nuestra tarea consiste precisamente en indagar por qué y en qué medida la aplicación de modos de inferencia transfinitos, tal y como éstos se presentan en el Análisis y en la teoría de conjuntos, nos permite obtener siempre resultados correctos. El manejo libre de lo transfinito y su entero dominio y control deben tener lugar a partir de lo finito. ¿Cómo es posible la solución de este problema?

De acuerdo con nuestros propósitos iniciales, añadiremos a los cuatro grupos de axiomas que hasta ahora hemos presentado aquellos que expresan los modos de inferencia transfinita. Estos se designan en el lenguaje corriente por medio de frases como "*todos*", "*hay*", "*tercero excluido*", "*inducción completa*", "*principio de Aristóteles*", "*de la existencia*", "*de la reducción*", "*de la completud*" y "*de elección*".

Voy a servirme de la idea que subyace al principio de elección para introducir una función lógica

$$\tau(A) \text{ o bien } \tau(A(a)),$$

que asigna a cada predicado $A(a)$, esto es, a cada enunciado con una variable a, un objeto definido $\tau(A)$. Más aún, esta función τ debe satisfacer el siguiente axioma:

V. Axioma de transfinitud

11. $A(\tau A) \rightarrow A(a)$.

Expresado en el lenguaje común este axioma nos dice que cuando un predicado A se aplica al objeto τA, también se aplica a todo objeto a. La función τA es una función individual definida de una sola variable A de predicados. Podemos llamarla la función transfinita, dando al mismo tiempo al axioma 11 el nombre de *axioma de transfinitud*. Para aclarar su contenido, tomemos, por ejemplo, en lugar de A el predicado "ser sobornable". Tenemos entonces que τA designa a una persona definida, con un sentido de la honestidad tan inquebrantable que del hecho de que ella resultase sobornable se seguiría que toda persona lo sería igualmente.

El axioma V de transfinitud debe verse como el origen de todos los conceptos, principios y axiomas transfinitos. Si, por ejemplo, añadimos los

VI. Axiomas definitorios de los cuantificadores universal y existencial

$$A(\tau A) \rightarrow (a)A(a),$$

$$(a)A(a) \rightarrow A(\tau A),$$

$$A(\tau A) \rightarrow (\mathsf{E}a)A(a),$$

$$(\mathsf{E}a)A(a) \rightarrow A(\tau A).$$

la totalidad de los principios puramente lógicos y transfinitos que hemos mencionado se obtendrían como teoremas; esto es,

$$(a)A(a) \rightarrow Aa$$
(Principio Aristótelico)

$$A(a) \rightarrow (\mathsf{E}a)Aa$$
(Principio Existencial)

$$(\bar{a})Aa \rightarrow (\mathsf{E}a)\bar{A}a,$$

$$(\mathsf{E}a)\bar{A}a \rightarrow (\bar{a})Aa,$$

$$(\overline{\mathsf{E}a})Aa \rightarrow (a)\bar{A}a,$$

$$(a)\bar{A}a \rightarrow (\overline{\mathsf{E}a})Aa.$$

Por medio de estas últimas cuatro fórmulas es posible demostrar la validez de las equivalencias anteriormente establecidas para totalidades finitas, lo mismo que el principio del tercero excluido para totalidades infinitas[5]. De esta manera, vemos que todo lo que hasta aquí hemos expuesto depende de la demostración de la consistencia de los axiomas I-V (1-11).

La idea fundamental que subyace a una prueba de esta índole es siempre la misma. Suponemos que tenemos una demostración concreta

[5] Estoy en deuda con P. Bernays por haberme hecho ver que la fórmula 11 basta para la derivación de todas estas fórmulas.

[konkret] dada como figura, con la fórmula final $0 \neq 0$. A este caso puede reducirse ciertamente la existencia de una contradicción. Una vez hecho esto mostramos por medio de una consideración finitista concreta que esto último no puede constituir una demostración que satisfaga nuestras exigencias.

Debemos ofrecer, en primer lugar, una demostración de la consistencia de los axiomas I-IV (1-10). El procedimiento consiste en modificar sucesivamente la demostración que hemos supuesto como existente, de acuerdo con los siguientes criterios:

1. La demostración puede transformarse por medio de la repetición y eliminación de fórmulas para obtener una demostración en la que para cada fórmula haya una y sólo una fórmula "sucesora", a cuyo surgimiento contribuya. De este modo, la demostración puede ser analizada en líneas [Fäden] que partiendo de los axiomas desembocan en las fórmulas terminales.

2. Las variables que intervienen en la demostración pueden ser eliminadas.

3. Puede lograrse que en cada fórmula únicamente aparezcan, aparte de los símbolos lógicos, los numerales

$$0\,,\ 0+1\,,\ 0+1+1\,,\ \ldots\,,$$

de tal manera que cada fórmula de la demostración se convierta en una fórmula "numérica".

4. Toda fórmula se convierte en una cierta "forma normal" lógica.

Una vez que estas operaciones se han efectuado para cada fórmula de la demostración, un control directo sobre ella es posible. Es decir, en un cierto sentido (aún por precisarse), será posible determinar si la demostración es "correcta" o "incorrecta". Si la demostración considerada satisface todas nuestras exigencias, toda fórmula en ella deberá aprobar, a su vez, este requisito, por lo que lo mismo tendría que ocurrir con la fórmula terminal $0 \neq 0$, lo que claramente no es el caso. Con ello se habría demostrado la consistencia de los axiomas de los grupos I-IV (1-10). La prueba detallada de esto, que aquí hemos solamente bosquejado, rebasa evidentemente los límites de una conferencia.

En nuestro caso, sin embargo, se hace urgente ofrecer una demostración de la consistencia del axioma V (11), pues es gracias a él que pueden justificarse en las matemáticas los modos de inferencia transfinitos.

Quisiera desarrollar con cierto detalle las ideas centrales de esta demostración en el primero y más sencillo de los casos.

Este primer caso se presenta ante nosotros tan pronto como extendemos nuestra teoría de los números, que hasta ahora ha mantenido un carácter estrictamente finito. Llevamos a cabo esto tomando en el axioma V (11) a los objetos a como numerales, esto es, como los números enteros positivos, incluyendo al 0, y a los predicados $A(a)$ como ecuaciones $f(a) = 0$, donde f es una función numérica común. La función lógica τ asigna a cada predicado un objeto, es decir, a cada función matemática f un número. τ se convierte entonces en una función de función numérica ordinaria, de tal manera que si f es una función definida, τ es un número definido. Si llamamos $\tau(f)$ a éste,

$$\tau(f) = \tau_a(f(a) = 0),$$

el axioma V (11) se convierte en el axioma

$$12.\ f(\tau(f)) = 0 \rightarrow f(a) = 0.$$

La propiedad de la función de función $\tau(f)$ representada en esta forma encuentra su realización mas sencilla cuando entendemos por $\tau(f)$ el número 0 en cuanto se satisface la ecuación $f(a) = 0$ para cada a, tomando $\tau(f)$ como el primer número a para el que $f(a) \neq 0$. De no ser así, $\tau(f)$ es una función transfinita y pertenece precisamente a la clase de aquellas que Brouwer y Weyl consideran ilícitas. Sin embargo, lo decisivo aquí es la demostración de que añadir el axioma 12 a los axiomas 1-10 no conduce a contradicciones.

Recordemos, para este fin, la prueba de la consistencia de los axiomas 1-10 y tratemos de extenderla al caso que nos ocupa. Hay que considerar ahora una nueva dificultad que consistiría en que en la demostración a la que nos enfrentamos aparece el signo $\tau(f)$, pudiéndose reemplazar la variable funcional f por funciones especiales cualesquiera φ, φ', ...

Por el momento, sin embargo, y en aras de la facilidad y la simplicidad, supondremos que hay una única función especial φ de ese tipo como posible reemplazo para f. De esta manera, la prueba en cuestión puede, en última instancia, transformarse en una demostración en la que, además de signos lógicos y numerales, sólo aparece $\tau(\varphi)$, en donde φ representa una función especial en cuya definición no se ha utilizado τ.

Dada esta demostración, procedemos a aplicar en orden las siguientes operaciones:

1. Reemplazamos uniformemente, y en cierta forma de manera provisional, a modo de ensayo, $\tau(\varphi)$ por el numeral 0. Nuestra demostración se convierte entonces en una sucesión de fórmulas "numéricas". Todas estas fórmulas son "correctas" en el sentido anterior, posiblemente con la excepción de aquellas que resultan del axioma 12. Ahora bien, cuando tomamos φ por f, si se hace la sustitución correspondiente para a y se pone el numeral 0 en lugar de $\tau(\varphi)$, las únicas fórmulas que se derivan del axioma 12 son de la forma

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow \varphi(\zeta) = 0.$$

Como en esta expresión ζ y φ representan, respectivamente, un numeral y una función definida recursivamente —la definición recursiva puede incorporarse fácilmente a nuestro formalismo— $\varphi(\zeta)$ se reduce también a un numeral. Se trata entonces esencialmente de ver si en estas fórmulas $\varphi(\zeta)$ se convierte en el numeral 0 después de esta reducción a un numeral, o si en algún momento a partir de $\varphi(\zeta)$ surge un numeral distinto de 0. En el primer caso habremos demostrado la consistencia, porque entonces todas las fórmulas que se siguen del axioma 12 son correctas. La sucesión de fórmulas que obtuvimos de la demostración se convierte nuevamente en una demostración en la que el control paso a paso garantiza que todas las fórmulas son correctas, por lo que la fórmula incorrecta $0 \neq 0$ no puede ser una fórmula terminal.

2. En el segundo caso, hemos obtenido una ζ, tal que

$$\varphi(\zeta) = 0$$

resulta una fórmula falsa. Procedemos después de la siguiente manera en relación a la demostración que aquí se nos presenta.

Sustituimos de manera uniforme en la prueba el numeral ζ, en lugar de 0, por $\tau(\varphi)$. Las fórmulas que se siguen del axioma 12 tienen entonces, en su totalidad, la forma

$$\varphi(\zeta) = 0 \rightarrow \varphi(\mathfrak{S}) = 0.$$

Se trata, además, de fórmulas siempre verdaderas, puesto que la fórmula que antecede al signo de implicación es falsa. Nuevamente en la demostración aparecen sólo fórmulas numéricas verdaderas, por lo que la fórmula final no puede ser $0 \neq 0$.

Con ello hemos dado una demostración completa de la consistencia de la función transfinita $\tau(f)$. Pero, a la vez, obtenemos el principio del tercero excluido para el concepto de una serie numérica infinita, como la que representa la variable numérica en f. Es decir, con base en los axiomas de la negación (II.5 y 6), la negación formal es equivalente a lo opuesto contradictorio. Como $\tau(f) \neq 0$ es la negación formal de $\tau(f) = 0$, por VI, $\tau(f) \neq 0$ y $(Ea)(f(a) \neq 0)$; y $\tau(f) = 0$ y $(a)(f(a) = 0)$ son respectivamente equivalentes.

La solución que nuestra teoría de la demostración da a este problema puede interpretarse como sigue. Nuestro pensamiento es finito, y cuando pensamos tiene lugar un proceso finito. Esta verdad, evidente en sí misma, se incorpora en la teoría de la demostración de la manera siguiente. Si en algún sitio surgiera una contradicción, al tiempo que nos percatamos de ella, tendría que realizarse una elección correspondiente entre la totalidad infinita de cosas involucradas en ella. De acuerdo con esto, en la teoría de la demostración no se afirma que pueda encontrarse siempre un objeto entre la infinidad de objetos, sino tan sólo que puede procederse siempre sin riesgo de error, como si, en efecto, se hubiera llevado a cabo la elección.

Podemos conceder que Weyl está en lo justo cuando habla de la existencia de un argumento circular, pero éste no constituye, en todo caso, un círculo vicioso. Más bien, la utilización del principio del tercero excluido no representa peligro alguno.

En la teoría de la demostración, a los axiomas finitos se añaden los axiomas y las fórmulas transfinitos, de manera análoga a como en la teoría de los números complejos a los elementos reales se añaden los imaginarios, y a como en la geometría a las figuras reales se añaden las imaginarias. Se puede, en verdad, afirmar que en la teoría de la demostración el éxito de esta manera de proceder es el mismo que en los casos mencionados, a saber: la simplicidad y el carácter deductivamente cerrado de la teoría.

De acuerdo con lo que hasta ahora hemos expuesto, la función transfinita $\tau(f)$ puede aplicarse sin restricciones en las matemáticas, tanto en la definición de funciones y construcción de nuevos conceptos, como en la realización de las demostraciones matemáticas.

Un ejemplo de definición de función nos lo proporciona la función

$$\varphi(a) = [a^{\sqrt{a}}],$$

en donde el signo de la derecha toma los valores 0 y 1 respectivamente, según que $a^{\sqrt{a}}$ sea un número racional o irracional.

Por lo que a su uso en las demostraciones se refiere, las pruebas que se encuentran en la literatura permiten reconocer fácilmente si en ellas se utiliza o no de manera esencial una función transfinita. En realidad, las dos demostraciones distintas, que nosotros mismos hemos ofrecido, del carácter finito de los sistemas de invariantes completos, constituyen ejemplos adecuados de lo anterior. En el primer caso, se utilizan modos de deducción transfinitos, mientras que en el segundo no. La primera de las pruebas de la finitud del sistema completo de invariantes presentada pertenece al tipo de demostraciones en las que los modos de deducción transfinita son esenciales e imprescindibles.

Puede suponerse, por supuesto, que un teorema finitista se puede demostrar siempre sin recurso alguno a modos transfinitos de deducción, como ocurre, por ejemplo, con el teorema de la finitud de un sistema completo de invariantes, según lo muestra la segunda de las pruebas mencionadas. Sin embargo, esta afirmación pertenece al tipo de afirmaciones de que toda proposición matemática en general o bien puede demostrarse o bien refutarse.

P. Gordan encuentra una cierta obscuridad en los modos de deducción transfinitos utilizados en la primera de nuestras demostraciones acerca de los invariantes. La manera de poner de manifiesto su insatisfacción es llamar a la prueba "teológica". Gordan modifica después la exposición del argumento, incorporando su simbolismo y creyendo, con ello, haber despojado a la demostración de su carácter "teológico". Sin embargo, lo único que logra es ocultar el modo de deducción transfinita en el formalismo de su simbolización[6].

---

[6] A finales de 1888, Hilbert ofreció una demostración indirecta del problema de Gordan acerca de la existencia de una base finita para la generación de invariantes en general (sin importar el número de variables que contengan). Con ello, Hilbert asumía una posición definida en relación al problema de la naturaleza de la existencia en matemáticas, específicamente, en oposición a Kronecker, para quien existencia implica construcción. El teorema de Hilbert fue impugnado, entre otros, por Gordan mismo ("Eso no es matemáticas, sino teología"). Sin embargo, en 1892 y apoyándose en su primer teorema (y en una idea de Kronecker en la teoría algebraica de los campos numéricos), Hilbert encontraría una prueba constructiva de tal resultado, dando con ello, de paso, un impulso definitivo al uso de métodos existenciales indirectos (reducción al absurdo) en las matemáticas (*Cfr.* C. Reid, *Hilbert*, Springer Verlag, Berlin, 1970, Cap. V). [N. de T.]

Sirviéndonos del mismo método que hemos utilizado para demostrar la consistencia de una función de función transfinita $\tau(f)$, podemos probar igualmente la consistencia de la función de funciones $\mu(f)$. Esta función —al igual que $\tau(f)$— tiene la propiedad de ser 0 cuando el argumento se anula [verschwindet] para todas las variables, y toma, por otra parte, el mínimo valor para el que $f(a)$ difiere de 0, en el caso contrario.

Por medio de esta función $\mu(f)$ se obtiene el principio de inducción completa

$$A(0) \rightarrow (a)(A(a) \rightarrow A(a+1)) \rightarrow A(a)$$

como teorema.

El reconocimiento de esto último, en una exposición concreta, constituye el resultado principal del ensayo de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?*

Para fundamentar el análisis, definimos el número real z que se encuentra entre 0 y 1 por medio de una fracción binaria y a ésta a través de una función $\varphi(n)$, a la que llamamos el valor de posición [Stellenwert], y que sólo puede ser 0 o 1:

$$z = 0 . a_1 a_2 a_3 \ldots \qquad (a_n = f(n)) .$$

Un ejemplo de fracción binaria definida de manera transfinita es el siguiente

$$0 . [2^{\sqrt{2}}] [3^{\sqrt{3}}] [4^{\sqrt{4}}] \ldots .$$

Esta expresión representa un número real bien definido, aunque, de acuerdo con el estado actual de la investigación, no pueda calcularse ni siquiera la primera fracción binaria.

El fundamento del análisis es el teorema de la cota superior. La función transfinita τ permite, en efecto, la demostración de la existencia de esa cota superior para cualquier sucesión de números reales.

Para percatarse de esto, conviene, en primer lugar, introducir los signos lógicos: "&" y "∨" (& para "y" y ∨ para "o"). Esto lo realizaremos aquí reduciendo estos signos a los símbolos lógicos que hemos utilizado hasta ahora, $\rightarrow$ y $\bar{}$.

$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

representan lo mismo, respectivamente, que

$$\overline{\overline{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}} \quad \text{y} \quad \overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{B}$$

Estipulamos ahora que $\mathfrak{R}f$ es es una abreviatura de

$$(a)(fa = 0 \vee fa = 1) \,\&\, (a)(\exists b)(f(a + b) = 1).$$

Es decir, $\mathfrak{R}f$ expresa que la función fa representa un número real en el intervalo semicerrado $(0, 1]$ por medio de la fracción binaria infinita

$$0 . f(1) f(2) f(3) \ldots$$

Una sucesión $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ de números reales se representa entonces por medio de una función $\varphi(a, n)$ en la cual la fórmula $\mathfrak{R}\varphi(a, n)$ resulta demostrable para todo entero [positivo] n. El curso adicional de la demostración tiene lugar de acuerdo con la siguiente idea básica:

Consideremos el esquema

$$\zeta_1 = 0 . \varphi(1,1)\varphi(2,1)\varphi(3,1)\ldots$$

$$\zeta_2 = 0 . \varphi(1,2)\varphi(2,2)\varphi(3,2)\ldots$$

$$\zeta_3 = 0 . \varphi(1,3)\varphi(2,3)\varphi(3,3)\ldots$$

. . . . . .

Fijémonos, en primer lugar, en las cifras de la primera columna después del punto. Si todas éstas son 0; es decir, si $\varphi(1, n) = 0$ para toda n, tómese $\psi(1) = 0$. De no ser así, $\psi(1) = 1$.

Si ahora en la segunda columna son 0 todas aquellas cifras que tienen la propiedad de que la cifra de la primera columna de la misma hilera horizontal es $\psi(1)$, tómese $\psi(2) = 0$; de no ser así, $\psi(2) = 1$.

Si en la tercera columna son 0 todas las cifras que tienen la propiedad de que cada una de las cifras de la primera y la segunda columnas de la misma hilera horizontal son $\psi(1)$ y $\psi(2)$ respectivamente, tómese $\psi(3) = 0$, si no, tómese $\psi(3) = 1$, etc.

Con base en esta observación podemos dar una definición precisa de la cota superior $\psi(a)$ de la sucesión $\varphi(a, n)$ de números reales por medio de la siguiente recursión simultánea:

$$\chi(0, n) = 0$$

$$\psi(a+1) = \pi_n \{ \chi(a,n) = 0 \rightarrow \varphi(a+1,n) = 0 \}$$

$$\chi(a+1,n) = \chi(a,n) + \iota(\psi(a+1), \varphi(a+1,n));$$

donde $\iota(a,b)$ es la función de a y b que representa 0 ó 1, según que $a = b$ ó $a \neq b$, y donde π_n es la función transfinita definida por medio del siguiente axioma

$$(n)\,\mathfrak{A}(n) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{A}n) = 0,$$

$$(\bar{n})\,\mathfrak{A}(n) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{A}n) = 1;$$

O, expresado con palabras: $\pi_n(\mathfrak{A}n)$ es 0 ó 1, según que el enunciado $\mathfrak{A}$ correspondiente sea válido o no para todo n.

Puede demostrarse estrictamente, en el sentido de mi teoría de la demostración, que $\mathfrak{R}\psi$ es válida y que, además, el número real $\psi(n)$ tiene la propiedad de la cota superior, donde la relación "menor" puede definirse para dos números reales cualesquiera f y g por medio de la fórmula

$$(\mathsf{E}a)\{(b)(b < a \rightarrow fb = gb) \,\&\, fa = 0 \,\&\, ga = 1\}$$

Considérese ahora en lugar de una sucesión de números reales un conjunto cualquiera de tales números (por ejemplo, tomando como dada para la variable funcional f un enunciado definido $\mathfrak{R}(f)$ que, por una parte, caracterice tanto a f como a una función que represente a un número real y que también caracterice, por la otra, a los números reales del conjunto). La cota superior $\psi(a)$ de este conjunto $\mathfrak{R}(f)$ de números reales se obtiene entonces por medio de la siguiente recursión simultánea:

$$\chi(0,f) = 0$$

$$\psi(a+1) = \pi_f \{\mathfrak{R}f \rightarrow (\chi(a,f) = 0 \rightarrow f(a+1) = 0)\}$$

$$\chi(a+1,f) = \chi(a,f) + \iota(\psi(a+1), f(a+1));$$

donde π_f es la función transfinita definida por los axiomas

$$(f)\,\mathfrak{A}(f) \rightarrow \pi_f(\mathfrak{A}f) = 0,$$

$$(\bar{f})\,\mathfrak{A}(f) \rightarrow \pi_f(\mathfrak{A}f) = 1.$$

Para terminar, me gustaría ilustrar otra aplicación, esta vez al principio de elección de Zermelo para conjuntos de números reales.

Anteriormente teníamos que un conjunto de números reales f estaba dado por un enunciado definido $\nu(f)$, con f como variable funcional. Añadimos ahora los axiomas

$$\mathfrak{R}f \rightarrow \nu(f) = 1$$

$$\overline{\mathfrak{R}f} \rightarrow \nu(f) = 0$$

cuya consistencia puede reconocerse con facilidad. De este modo, el conjunto se encuentra definido por la función de función $\nu(f)$, que tiene el valor 1 para el número real f del conjunto y el valor 0 para todos los demás números reales f. A partir de la fórmula

$$\mathfrak{R}f \rightarrow \mathfrak{R}f,$$

que es válida para $\mathfrak{R}$, se obtiene

$$\nu(f) = 1 \rightarrow \mathfrak{R}f.$$

ν es una función de función especial. Sea r la variable correspondiente; es decir, sea r la variable de la función de función cuyo argumento es una función monádica ordinaria.

Un conjunto especial de conjuntos de números reales es entonces representado por un enunciado especial $\mathfrak{M}(r)$, en el que aparece r y para la cual es válida la fórmula:

$$\mathfrak{M}(r) \,\&\, (rf = 1) \rightarrow \mathfrak{R}f$$

Supongamos que este conjunto de conjuntos tiene la propiedad de que cualquier elemento suyo que sea un conjunto de números reales es no vacío, i.e. contiene por lo menos un número real. O, expresado formalmente,

$$\mathfrak{M}(r) \rightarrow (\mathsf{E}f)(r(f) = 1).$$

Definimos ahora una función transfinita τ_f como antes lo hemos hecho con τ_a, con la diferencia de que en lugar de las variables numéricas a tomamos de antemano una variable funcional f. Es decir, τ_f se define por medio del axioma

(12*) $$r(\tau_f(r)) = 0 \rightarrow r(f) = 0$$

que corresponde a nuestro axioma 12 para τ_a y que se obtiene directamente del axioma V (11) cuando se toman en éste las funciones f como objetos y las ecuaciones $r(f) = 0$ como predicados.

En todo esto, τ_f representa siempre una función, mientras que el argumento es una función de función r.

Se obtienen así los siguientes teoremas:

$$(\mathsf{E}f)(r(f) = 1) \rightarrow (\bar{f})\ (rf = 0),$$

$$(\bar{f})\ (rf = 0) \rightarrow r(\tau_f(r)) \neq 0,$$

$$r(\tau_f(r)) \neq 0 \rightarrow r(\tau_f(r)) = 1,$$

de lo que se sigue

$$\mathfrak{M}(r) \rightarrow r(\tau_f(r)) = 1,$$

Es decir, para cada elemento r del conjunto $\mathfrak{M}(r)$ se encuentra asociada una función numérica $\tau_f(r)$. Esta función representa, además, un número real —porque de una fórmula anterior se sigue inmediatamente $\mathfrak{R}(\tau_f(r))$.

Las funciones $\tau_f(r)$ forman un conjunto, pues para obtener un enunciado que defina la totalidad de estas funciones —las llamamos $g(a)$— es necesario solamente formular que cada una de ellas coincide con el representante $\tau_f r$ de un conjunto r de $\mathfrak{M}$, tal y como esto se expresa en la fórmula

$$(\mathsf{E}r)\{\mathfrak{M}(r)\ \&\ (a)(g(a) = \tau_f r(a))\}$$

De esta manera, de acuerdo con el método de representación original, tenemos aquí un conjunto. Con ello hemos demostrado el principio de elección de Zermelo para conjuntos de conjuntos de números reales.

Por lo demás, debido a la aparición del símbolo $(\mathsf{E}r)$, resulta necesario todavía demostrar la consistencia de la función transfinita $\tau_f(r)$, que pertenece a un tipo nuevo de variable r. Esta prueba tiene

que darse, al igual que la demostración para π_n y π_f, de acuerdo con el modelo de la función transfinita τ_a.

Queda pendiente todavía la tarea de llevar a la práctica en detalle las ideas básicas que aquí hemos delineado. La realización de ello permite la fundamentación completa del análisis, a la vez que sienta las bases para una fundamentación de la teoría de conjuntos misma.