

La fundamentación de la teoría elemental de números

Cuando en la esfera de las matemáticas examinamos las dos fuentes de nuestro conocimiento, es decir, la experiencia y el pensamiento puros, surge una serie de ideas que podrían también resultar de interés para la filosofía. Todas ellas nos remiten a algo común a esas dos fuentes, en sí tan diversas, del conocimiento. Así, por ejemplo, podemos observar la unidad de la sustancia en la materia, aunque, por otra parte, la unidad de los fundamentos se presenta igualmente ante nuestro pensamiento como una exigencia a cumplir y como algo que en muchas ocasiones también logramos satisfacer.

La unidad de las leyes de la naturaleza, que a veces se nos aparece de forma tan sorprendente, puede ser considerada como un ejemplo de ambas fuentes. Sin embargo, un fenómeno aún más notorio que el de esta idea de la unidad es el que podríamos llamar la armonía preestablecida, que pone claramente de manifiesto la existencia de una relación entre la naturaleza y el pensamiento.

El ejemplo más extraordinario y maravilloso de la misma nos lo ofrece la ahora célebre teoría de la relatividad de Einstein. En ella, la exigencia general de los invariantes determina por sí sola, de manera unívoca, las complicadas ecuaciones diferenciales para los potenciales de gravitación. Pero esa determinación no sería posible sin el profundo trabajo de investigación llevado a cabo por Riemann con mucha anterioridad. En realidad, el hecho de que un sistema formal particular tan complejo, con coeficientes numéricos, tenga su origen en una idea general, constituye un caso más bien aislado, inclusive en el análisis matemático.

La teoría de la demostración, que a continuación discutiremos, representa igualmente un ejemplo de armonía preestablecida. Esta teoría

se sirve del llamado cálculo lógico, desarrollado con anterioridad con fines muy diferentes, es decir, para la sola abreviatura y comunicación de enunciados.

Ahora bien, una observación cuidadosa nos conduce a la conclusión de que, aparte de la experiencia y el pensamiento, existe una tercera fuente del conocimiento. Aunque en la actualidad ya no podemos estar de acuerdo con ciertos aspectos del pensamiento de Kant, la idea básica más general de su epistemología conserva, sin embargo, toda su validez: la determinación de las ideas *a priori* y con ello la investigación de las condiciones de posibilidad de todo conocimiento.

Esto es, en mi opinión, lo que en esencia ocurre en mis investigaciones sobre los principios de las matemáticas. En ellas, lo *a priori* es, ni más ni menos, un enfoque fundamental que me gustaría llamar también finitista: hay algo que nos está dado de antemano en la representación, esto es, ciertos objetos extralógicos concretos, presentes intuitivamente como vivencia inmediata y previos a todo pensamiento.

Si la inferencia lógica ha de ser algo seguro, es necesario que tengamos una visión global y completa, en todas sus partes, de estos objetos. Su apariencia, su diferenciación, su secuencia y coordinación se nos da con ellos mismos de manera intuitiva e inmediata como algo que ya no es susceptible, ni requiere, de una reducción adicional. Esta es la concepción fundamental que considero necesaria no sólo para las matemáticas, sino también, en general, para todo pensamiento, toda comprensión y comunicación científicos, y sin la cual ninguna actividad del espíritu sería posible. Con ello creo haber distinguido y caracterizado la tercera fuente del conocimiento que se añade a la experiencia y a la lógica.

Las ideas *a priori* son aquellas ideas intuitivas y lógicas que se obtienen en el marco del enfoque finitista. En éste nos percatamos, en particular, de que hay principios que Kant considera *a priori* y que nosotros asignamos a la experiencia, por ejemplo, la totalidad de los hechos fundamentales de la geometría, así como las propiedades elementales del espacio y la materia. Pero existen también, por otra parte, principios que normalmente han sido tenidos como *a priori*, pero que no es posible obtener en el marco de un enfoque finitista, por ejemplo, el principio del tercero excluido y, en general, los llamados enunciados transfinitos.

La aplicación más inmediata y la primera manifestación de los enunciados de este tipo tiene lugar en la teoría de los números. Con ello llegamos al tema central de nuestra conferencia.

Es curioso y filosóficamente significativo que las primeras y más sencillas cuestiones acerca de los números $1, 2, 3, \dots$ presenten dificultades de un nivel tan profundo. Estos problemas deben ser superados. Porque, en efecto, ¿cómo puede ser, en general, posible el conocimiento, si ni siquiera la teoría de los números puede ser fundamentada y si tampoco resulta necesario un consenso total, ni obligatoria la corrección absoluta?

Nos llevaría demasiado lejos, además de que sería superfluo, exponer aquí las múltiples y diferentes estrategias que hoy podemos reconocer como erróneas para la solución de estos problemas. Se ha intentado, por ejemplo, definir a los números de manera puramente lógica, al tiempo que otros han considerado como algo evidente las argumentaciones usuales de la teoría de los números. Ambos enfoques conducen a objeciones contundentes. Sin embargo, existe una vía aún no transitada y mucho más cercana a la práctica matemática que nos puede conducir a nuestra meta. Antes de adentrarnos en su descripción, me gustaría hacer algunas observaciones en relación a los momentos más importantes en la prehistoria de esta problemática.

En 1888, en mi calidad de joven *Privatdozent*, efectué un viaje de visita a diversas universidades alemanas partiendo de Königsberg. En Berlín, mi primera estación, escuché hablar en todos los círculos matemáticos, tanto entre los jóvenes como entre los viejos colegas, del trabajo entonces recién aparecido de Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, la mayor parte de las ocasiones de manera negativa. Este tratado es, al lado de la investigación de Frege, el intento más importante, por primera ocasión verdaderamente profundo, de dar un fundamento a la teoría elemental de los números. Aproximadamente por las mismas fechas, es decir, hace ya más de una generación, Kronecker formulaba de manera clara, ilustrando sus ideas con numerosos ejemplos, una concepción que coincide en lo esencial con nuestro enfoque finitista.

En aquellos días, para nosotros los jóvenes matemáticos, tanto estudiantes como docentes, se convirtió en una especie de deporte la traducción de las demostraciones efectuadas de manera transfinita a lo finito, siguiendo el modelo de Kronecker. Sin embargo, Kronecker cometió un error al declarar ilícitas las argumentaciones transfinitas y decretar prohibiciones en relación a las mismas. En particular, no sería permisible, de acuerdo con él, concluir que si una afirmación $\mathfrak{A}(n)$ no es válida para todo número entero n , debe existir un número entero para

el que esa afirmación resulte falsa. En aquella época, los matemáticos rechazaron al unísono sus prohibiciones al hacer por completo caso omiso de las mismas.

Ahora bien, ¿qué es lo que realmente ocurre con el uso de las argumentaciones transfinitas?

La teoría de los campos numéricos, por ejemplo, constituye un edificio perfectamente articulado y altamente desarrollado en su construcción. Se encuentra, además, ligada a las teorías más avanzadas del análisis, esto es, a las teorías de lo que podemos considerar como el más bello, perfecto y elevado de los productos del espíritu humano. En ella, el principio del *tertium non datur* y, en general, las argumentaciones transfinitas del tipo proscrito por Kronecker se utilizan a cada instante.

Todos los paladines del espíritu anteriores y posteriores a Gauss, tanto Hermite como Jacobi y Poincaré, se han servido de la manera más diversa y audaz de este tipo de argumentaciones, y en ningún momento se ha presentado el más leve indicio de discrepancia. Por lo demás, si pensamos en todas sus aplicaciones y tenemos clara la gran cantidad de inferencias transfinitas que tiene lugar, por ejemplo, en la teoría de la relatividad y en la teoría cuántica, y la manera en la que, después de todo, la naturaleza se ajusta a estos resultados: el rayo estelar fijo, el mercurio y los complicados espectros en nuestro planeta y en la lejanía de miles de años luz, podemos con toda razón preguntarnos, ¿hemos de poner en tela de juicio siquiera por un momento nuestro derecho a utilizar la ley del tercero excluido sólo porque Kronecker y algunos filósofos metidos a matemáticos, por causas enteramente arbitrarias y ni siquiera formulables de manera precisa lo dicen?

Todo conocimiento científico descansa en una evaluación razonable de la probabilidad, al concitar consenso y oposición. Pensemos, por ejemplo, en la construcción del mundo estelar en la astronomía, o en las leyes de la herencia y las ideas evolucionistas en la biología, todos ellos resultados que hoy consideramos como verdades seguras y comprobadas. Sería el fin de la ciencia y la imposibilidad de cualquier progreso el que ni siquiera admitiéramos como verdades las leyes de la aritmética elemental. Y sin embargo, aún en nuestros días hay seguidores de Kronecker que ponen en duda la validez del principio del tercero excluido. Nos enfrentamos aquí, a decir verdad, a la más cruda de las incredulidades surgidas en la historia de la humanidad.

Pero, por otra parte, las matemáticas no pueden apoyarse en la creencia, no importa que tan firme sea ésta, sino que están obligadas a llevar a cabo una elucidación hasta las últimas consecuencias.

Es evidente que el principio del tercero excluido resulta lícito en el caso de un número finito de enunciados. Por lo tanto, toda nuestra atención ha de dirigirse al concepto de "infinito". Yo mismo he llevado a cabo una investigación exhaustiva acerca del infinito¹, de la que aquí sólo puedo presentar la conclusión.

La física enseña que un continuo homogéneo, susceptible de una divisibilidad continuada y que, en consecuencia, realice el infinito en la esfera de lo pequeño no existe en la realidad. La divisibilidad infinita de un continuo es una operación que tiene lugar únicamente en el pensamiento, es decir, se trata de una idea que es contradicha tanto por nuestras observaciones como por las experiencias de la física y la química.

Por otra parte, también en la astronomía se han planteado serias dudas acerca de la existencia de un espacio infinito, es decir, del infinito en la esfera de lo grande. De igual manera, podemos afirmar que toda nuestra acción es finita y que en ella no tiene cabida lo infinito. El infinito no se realiza, entonces, en ninguna parte; no existe en la naturaleza y no resulta tampoco admisible como fundamento de nuestro pensamiento intelectual.

Y sin embargo, no podemos prescindir de la aplicación incondicionada y general del principio del tercero excluido ni de la negación. Hacerlo significaría la imposibilidad de una construcción unitaria y completa de nuestra disciplina. El manejo del infinito debe ser garantizado, en consecuencia, a partir de lo finito, y esto es precisamente lo que logra mi teoría de la demostración.

Con esta nueva fundamentación de las matemáticas me propongo, en realidad, una meta de gran importancia. Mi intención es eliminar definitivamente como tal el problema de los fundamentos en las matemáticas, convirtiendo a todo enunciado matemático en una fórmula concreta ostensible y estrictamente deducible, y presentando las construcciones conceptuales y las inferencias matemáticas en forma tal que

¹ Cfr. Cap.V del presente volumen. [N. de T.]

resulten no sólo irrefutables, sino que nos proporcionen también una imagen de la disciplina en su totalidad².

La idea básica de mi teoría de la demostración es la siguiente: todo lo que hasta ahora ha formado parte de las matemáticas es objeto en ella de una formalización rigurosa. De ese modo las matemáticas reales, es decir, las matemáticas en un sentido estricto, se convierten en un conjunto de fórmulas. Estas fórmulas se diferencian de las fórmulas matemáticas corrientes únicamente por el hecho de contener, además de los símbolos lógicos usuales, los símbolos para la implicación ($\rightarrow$) y para la negación ($\neg$).

Ciertas fórmulas que hacen las veces de fundamento del edificio formal de las matemáticas reciben el nombre de *axiomas*. Una *demostración* es una figura que debe presentarse ante nosotros como algo concreto y que consiste de inferencias. En estas inferencias, cada una de las premisas es o bien un axioma, o coincide con la fórmula final de una inferencia cuyas premisas ya aparecen en la demostración, o bien se obtiene por reemplazo en una fórmula de este tipo o en un axioma.

En lugar de la inferencia concreta, lo que tenemos en la teoría de la demostración es un procedimiento puramente externo de acuerdo con reglas, a saber: la utilización del esquema de inferencia y la sustitución. Decimos, finalmente, que una fórmula es demostrable cuando es o bien un axioma o es la fórmula final de una demostración.

A las matemáticas reales formalizadas de la manera que acabamos de describir se añade un elemento nuevo que podemos considerar como una nueva matemática, una *metamatemática*, que resulta necesaria para asegurar a aquélla, y en la que, a diferencia de los principios deductivos puramente formales de la matemática real, se recurre a la inferencia concreta, pero únicamente con el fin de establecer la consistencia, el carácter no contradictorio de los axiomas.

Los axiomas y los teoremas así obtenidos, es decir, todas las fórmulas que surgen en estas transformaciones, representan imágenes [Abbilder] de los pensamientos y las ideas que dan lugar a los métodos usuales en las matemáticas.

² En sus *Gesammelte Abhandlungen*, Springer Verlag, vol. 3, Berlin, 1935, pp. 192-195, Hilbert publicó solamente la parte del presente artículo que comienza aquí y que se extiende hasta el punto señalado por la nota 5. [N. de T.]

Por lo demás, el programa que acabamos de describir condiciona ya la elección de los axiomas de nuestra *teoría de la demostración*. En realidad, nuestro procedimiento en todo ello es enteramente análogo al que se observa en la geometría, es decir, dividimos a los axiomas en varios grupos cualitativamente distintos:

I. Axiomas para la implicación

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

(Adición de una suposición);

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \{ (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \}$$

(Eliminación de un enunciado);

$$\{ A \rightarrow (A \rightarrow B) \} \rightarrow (A \rightarrow B)$$

II. Axiomas para la “conjunción” (&) y la “disyunción” (v)

III. Axiomas para la negación

$$\{ A \rightarrow (B \& \bar{B}) \} \rightarrow \bar{A}$$

(Principio de contradicción);

$$\bar{\bar{A}} \rightarrow A$$

(Principio de la doble negación).

Los axiomas de los grupos I, II y III no son, pues, otros que los del cálculo proposicional.

IV. Axiomas de transfinitud

$$(x)A(x) \rightarrow A(b)$$

(Axioma aristotélico de inferencia de lo general a lo particular);

El converso de este axioma está dado por el esquema³

$$\frac{A \rightarrow B(a)}{A \rightarrow (x)B(x)};$$

³ En donde a no puede aparecer en A .

$$A(a) \rightarrow (Ex)A(x).$$

Nuevamente, el converso de este último estaría expresado por un esquema. De lo anterior se obtienen, además, otras fórmulas. Por ejemplo,

$$(\bar{x})A(x) \Leftrightarrow (Ex)\bar{A}(x)$$

(si un predicado no se aplica a todos los argumentos, existe un contraejemplo para el mismo, y viceversa);

$$(\bar{Ex})A(x) \Leftrightarrow (x)\bar{A}(x)$$

(si no hay ningún caso específico de un enunciado, éste resulta falsa para todos los argumentos, y viceversa).

De esta manera, los axiomas del grupo IV son los axiomas del cálculo de predicados.

A todos ellos se añaden los axiomas matemáticos propiamente dichos.

V. Axiomas de la igualdad

$$a = a;$$

$$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b));$$

y los

VI. Axiomas numéricos

$$a + 1 \neq 0;$$

además del axioma de la inducción completa y el esquema de recursión.

Agreguemos, por último, que la demostración de consistencia ha sido claramente dada por Ackermann y von Neumann lo que permite mostrar que en la teoría elemental de los números es posible obtener no sólo la consistencia de los axiomas que acabamos de enlistar, sino también que en esta teoría resultan admisibles los principios deductivos transfinitos, en particular, el principio del *tertium non datur*.

De acuerdo con ello, la más importante de nuestras tareas consiste en la demostración de los dos principios siguientes (*Cfr. Math. Ann.*, vol. 102, p. 6.⁴):

1. Una proposición es demostrable cuando se ha establecido que es consistente, esto es, no contradictoria.

2. Si puede establecerse que una cierta proposición $\mathfrak{A}$ es consistente con los axiomas de la teoría de los números, es imposible demostrar que también $\bar{\mathfrak{A}}$ resulta consistente con esos mismos axiomas.

He logrado encontrar ya una prueba de estas afirmaciones, por lo menos en casos muy sencillos. Podemos avanzar considerablemente en esta dirección si a las reglas de inferencia aceptadas (sustitución y esquemas de inferencia) añadimos la siguiente regla, que es también de carácter finitista:

Si ya se ha demostrado que la fórmula

$$\mathfrak{A}(\zeta)$$

resulta siempre una fórmula numérica correcta cuando ζ es una cifra [Ziffer] cualquiera, podemos escribir como fórmula inicial la fórmula

$$(\forall x) \mathfrak{A}(x).$$

Esta nueva regla tiene también un carácter finitista.

Por otra parte, debemos recordar aquí que la proposición $(\forall x) \mathfrak{A}(x)$ tiene un alcance mucho mayor que la fórmula $\mathfrak{A}(\zeta)$, donde ζ es una cifra cualquiera. Porque, en el primer caso, en $\mathfrak{A}(x)$ no sólo puede ponerse una cifra arbitraria x , sino también cualquier expresión

⁴ Hilbert se refiere aquí a su artículo de 1928, *Probleme der Grundlegung der Mathematik* [Problemas de la Fundamentación de las Matemáticas], en el que comenta algunos problemas fundamentales abiertos en la teoría de la demostración. Uno de ellos (problema III) es el de probar con medios finitistas la completud del sistema axiomático para la teoría de los números, es decir, el de reformular en términos estrictamente finitistas la demostración usual sobre la existencia de un isomorfismo, de tal manera que con ello quedara igualmente establecido que a) si un cierto enunciado β resulta demostrativamente consistente con los axiomas de esa teoría, la prueba de la consistencia de la negación de β con esos mismos axiomas es imposible, y, además, que b) si un enunciado es consistente con esos axiomas, también es demostrable a partir de ellos. Por supuesto, en otras teorías menos elementales sería posible demostrar la consistencia con un mismo sistema axiomático tanto de un enunciado β como de su negación. De ser así, la elección estaría dictada por las ventajas sistemáticas que en cada caso resulten (principio de la permanencia de las leyes). [N. de T.]

numérica de nuestro formalismo, además de que podemos igualmente formar la negación, de conformidad con el cálculo lógico.

Observemos, en primer lugar, que el sistema axiomático conserva su consistencia cuando le añadimos la nueva regla.

Supongamos ahora que se nos presenta una demostración formal que tiene como fórmula final una contradicción.

La prueba de consistencia consiste en transformar a todas las fórmulas de la demostración en fórmulas numéricas, de acuerdo con un procedimiento determinado, examinándolas después para verificar si son verdaderas [richtig]. Ahora bien, nuestro procedimiento tiene la propiedad de hacer que también las fórmulas que se han obtenido con la nueva regla se transformen en fórmulas numéricas; así, de $(x) A(x)$ se obtiene una fórmula $A(\zeta)$, donde ζ es una cifra dada. Las presuposiciones de la aplicación de la nueva regla garantizan que $A(\zeta)$ es una fórmula verdadera. Nuestro procedimiento transforma nuevamente a todas las fórmulas iniciales de la demostración en fórmulas verdaderas, con lo que queda establecida la prueba de consistencia.

Consideremos ahora una fórmula $\mathfrak{S}$ de la forma

$$(x) A(x),$$

en la que no figure ninguna otra variable aparte de x y que sea consistente con nuestros axiomas. Con toda seguridad, $A(\zeta)$ es verdadera, con tal de que ζ sea una cifra. De no ser así, $A(\zeta)$ tendría que ser verdadera y, por lo tanto, demostrable. Pero esto contradice $(x) A(x)$ y resulta incompatible con nuestra suposición. Hemos establecido así, de acuerdo con nuestra nueva regla de inferencia, la fórmula $\mathfrak{S}$. En consecuencia, el principio 1 resulta válido para cualquier enunciado $\mathfrak{S}$ de la forma $(x) A(x)$ en la que aparte de x no figure ninguna otra variable.

Precisamente para estos enunciados del tipo de $\mathfrak{S}$ se sigue también, a partir de la proposición 1 que acabamos de establecer, la validez de la proposición 2.

Por otra parte, es evidente que si partimos de una afirmación $\mathfrak{T}$ de la forma

$$\mathfrak{T} : (Ex) A(x),$$

su negación

$$\bar{\mathfrak{T}} : (x) \bar{A}(x),$$

es de la forma de $\mathfrak{S}$ anteriormente considerada.

De acuerdo con el principio 2, es imposible ofrecer una prueba de la consistencia de las dos afirmaciones $\mathfrak{T}$ y $\bar{\mathfrak{T}}$. Por lo tanto, si suponemos que contamos ya con una prueba de la consistencia de $\mathfrak{T}$, la demostración correspondiente para $\bar{\mathfrak{T}}$ no puede darse, con lo que también el principio 2 queda establecido para cualquier afirmación de la forma $\mathfrak{T}$. Sin embargo, es claro que a partir de ello no puede todavía concluirse que $\mathfrak{T}$ sea también demostrable⁵.

A la teoría de la demostración se le ha hecho una serie de objeciones de muy diversa índole. Sin embargo, todas ellas carecen de fundamento por lo que es conveniente observar lo siguiente.

1. Los críticos de mi teoría deben también señalar con precisión el sitio en el que en mi demostración se comete un error; de otro modo, me resulta imposible examinar su argumentación.

2. Se ha dicho acerca de mi teoría que aunque las proposiciones resultan ciertamente consistentes, esto no basta para considerarlas demostradas. Por supuesto que son demostrables, como yo mismo lo he mostrado aquí en casos sencillos. En general, y tal y como yo esperaba desde un principio, resulta que el establecimiento de la consistencia constituye el objetivo esencial de la teoría de la demostración y, asimismo, que la cuestión de la demostrabilidad también puede resolverse con una ocasional y adecuada extensión de las determinaciones, preservando en cada caso el carácter finito de nuestras argumentaciones. Pero lo que no puede hacerse es exigir que una teoría resuelva de inmediato y por completo todos los problemas importantes que se le plantean; es suficiente tan sólo que muestre la vía para hacerlo.

3. Los críticos de mi teoría deben entender sus conceptos, por ejemplo, el de "consistencia", con el uso que yo les doy, no como otros autores los definen. En consecuencia, mi interpretación en lo que respecta a este punto es decisiva, pues es la única que se considera en la teoría.

4. A veces, las objeciones que se hacen a mi teoría se refieren a aspectos secundarios y carentes por completo de importancia para sus resultados. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, cuando se critica el uso que hago del término "ideal", un uso que, por lo demás y a pesar de lo que se diga, considero extremadamente adecuado y útil para el en-

⁵ Ver nota 4. [N. de T.]

tendimiento. Pero han sido también frecuentes las opiniones prejuiciadas y unilaterales y los lugares comunes. En otros artículos me he ocupado ya de las objeciones acerca del formalismo⁶. Las fórmulas constituyen un instrumento indispensable para la investigación lógica. Por supuesto, su uso requiere de un trabajo intelectual preciso, haciendo imposible al mismo tiempo la palabrería vacua.

5. Hasta ahora no ha habido ninguna otra teoría que permita obtener los mismos resultados. Más aún, estoy convencido de que no es, en realidad, concebible ninguna otra teoría que lo logre, puesto que lo que hace la teoría de la demostración no es sino representar la actividad última de nuestro entendimiento, elaborando un registro de las reglas según las cuales procede, de hecho, nuestro pensamiento.

Pensar ocurre de manera paralela a hablar y escribir; esto es, por medio de la construcción y coordinación de enunciados. Para llevar a cabo una fundamentación no necesitamos, en consecuencia, de Dios, como Kronecker, ni de la suposición de una capacidad especial de nuestro entendimiento acorde al principio de inducción completa, como Poincaré, ni de una intuición originaria, como Brouwer, ni tampoco, finalmente, de un axioma de infinitud o de un axioma de reducibilidad, como Russell y Whitehead; suposiciones todas ellas realmente concretas [*inhaltlich*] y no compensables por medio de pruebas de consistencia, de las que las de estos dos últimos autores no son ni siquiera plausibles.

En un escrito filosófico reciente encontramos la siguiente proposición:

“La Nada es la negación pura de la totalidad del Ser”⁷.

Esta proposición resulta sumamente instructiva porque, a pesar de su brevedad, ilustra todas las violaciones de los principios expuestos en la teoría de la demostración. Conceptos como “la totalidad del Ser” encierran en sí una contradicción y ponen en peligro el sentido de cualquier afirmación. Pero aparte de ello, en este caso se aplica al problemático concepto de la totalidad del Ser la negación. Una de las tareas más importantes de la teoría de la demostración es la clarificación del sentido y admisibilidad de la negación.

⁶ Cfr. El Cap. III del presente volumen. [N. de T.]

⁷ Cfr. M. Heidegger, *Sein und Zeit*, §58. [N. de T.]

La negación es un proceso formal por medio del cual, a partir de un enunciado $\mathcal{S}$, resulta otro que se encuentra ligado a $\mathcal{S}$, por los axiomas de la negación anteriormente mencionados, es decir, por el *principium contradictionis* y el principio del *tertium non datur*. El proceso de negación constituye un instrumento teórico imprescindible para la investigación. Su aplicación incondicionada es la que hace posible la completud y el carácter cerrado de la lógica. Sin embargo, los enunciados obtenidos por medio de la negación representan, en general, un ideal, por lo que querer tomar a esos enunciados ideales como algo en sí mismo real significaría ignorar tanto a la naturaleza como a la esencia del pensamiento.

Estoy convencido de haber logrado lo que me había propuesto y había adelantado en relación a la teoría de la demostración: la eliminación definitiva del problema de los fundamentos de las matemáticas como tal.

Con toda seguridad resultará de interés para los filósofos que haya una disciplina como las matemáticas. Nuestra tarea como matemáticos consiste en cuidar a nuestra disciplina como si se tratara de un santuario, para que en el futuro *todo* conocimiento humano pueda participar también de la misma precisión y claridad. No tengo la menor duda de que ese momento ha de llegar ni de que lo que digo ha de ocurrir.