

El pensamiento axiomático

Una sociedad particular sólo puede desarrollarse saludablemente cuando también lo hacen los pueblos que le son vecinos. De manera análoga, el bienestar y el interés de los estados demandan no sólo el mantenimiento de un orden interno, sino también la existencia de un orden general en las relaciones entre ellos. Lo mismo ocurre en la ciencia.

Haciéndose cargo de esta circunstancia, los más importantes pensadores en las matemáticas han mostrado un constante interés por las leyes y, en general, por el orden que priva en las ciencias vecinas, cultivando en beneficio de nuestra disciplina sus relaciones con amplios e importantes ámbitos científicos de la física y la teoría del conocimiento.

En mi opinión, la mejor manera de aclarar la naturaleza y el fundamento de estas fructíferas relaciones consiste en exponer el método general de investigación que parece imponerse cada vez más en las matemáticas modernas, el *método axiomático*.

Si consideramos en conjunto los hechos que conforman una cierta esfera del conocimiento más o menos comprensiva, nos percataremos de inmediato de que la totalidad de los mismos es susceptible de un orden. La ordenación se lleva a cabo recurriendo a una cierta *trama de conceptos* relacionados entre sí, de tal manera que a cada objeto y a cada hecho del campo de conocimiento de que se trate les corresponda, respectivamente, un concepto de esa trama y una relación lógica entre conceptos del mismo. La trama de conceptos no es otra cosa que la *teoría* de esa esfera del saber.

Esta es precisamente la manera en la que se ordenan en la geometría los hechos geométricos, en la que se ordenan los hechos aritméticos en una teoría de los números, y los hechos estáticos, mecánicos y electrodinámicos en una teoría de la estática, en una teoría de la mecánica y

en una de la electrodinámica respectivamente. Y es así como una teoría de los gases impone un orden a los hechos de la física de los gases. Lo mismo ocurre en las esferas del conocimiento de la termodinámica, de la geometría óptica, de la teoría elemental de la radiación, de la conducción del calor, o en el cálculo de probabilidad y en la teoría de conjuntos. Igualmente en muchos otros campos del conocimiento matemático puro, como en la teoría de las superficies, la teoría de las ecuaciones de Galois o la teoría de los números primos, y del conocimiento no matemático como en ciertas ramas de la psicofísica o de la teoría monetaria.

Si observamos de cerca una teoría determinada, reconoceremos en ella un reducido número de proposiciones distinguidas que sirven de fundamento para la construcción del entramado de conceptos que hemos mencionado. A partir de esas proposiciones y con base en principios lógicos, podemos obtener en su totalidad el edificio conceptual que subyace a la disciplina en cuestión.

Es así como en la geometría basta el principio de linearidad de la ecuación del plano y el de la transformación ortogonal de las coordenadas para permitirnos obtener, haciendo uso exclusivo de recursos analíticos, la totalidad de la disciplina que conocemos como geometría euclidiana del espacio. En la teoría de los números bastarían, por ejemplo, las leyes para las operaciones y las reglas para los números enteros. En la estática, este papel central es asumido por el teorema del paralelogramo de fuerzas, mientras que en la mecánica podría representarlo la ecuación diferencial del movimiento de Lagrange, y en la electrodinámica, las ecuaciones de Maxwell, con la exigencia adicional de la rigidez y la carga del electrón. La termodinámica puede construirse enteramente a partir del concepto de función de energía y la definición de temperatura y presión como derivadas de las variables de entropía y de volumen. En la teoría elemental de la radiación, basta el principio de Kirchhoff acerca de las relaciones entre emisión y absorción, mientras que el cálculo de probabilidades puede basarse enteramente en el principio de desviación de Gauss. La teoría de los gases en la ley de la entropía, como el logaritmo negativo de la probabilidad del estado. La teoría de las superficies se basa en la representación del elemento de arco por medio de la forma diferencial cuadrática; la teoría de las ecuaciones en el teorema de la existencia de raíces; la teoría de los números primos en la ley de la realidad y frecuencia de los ceros de la función riemanniana $\zeta(t)$ del teorema fundamental.

En un primer nivel podemos considerar a todos estos principios básicos como *axiomas de las esferas particulares del conocimiento*. El desarrollo y progreso de cada una de éstas consistiría entonces simplemente en la extensión lógica del aparato conceptual del que ya disponemos. Este es el enfoque dominante en las matemáticas puras. Es precisamente a los métodos de trabajo e investigación que de él se derivan a los que debemos el enorme desarrollo de la geometría, de la aritmética, de la teoría de funciones y de la totalidad del análisis.

Con todo ello, el problema de la fundamentación de los campos particulares del conocimiento encontraba al mismo tiempo una solución, si bien de carácter provisional. En efecto, poco a poco se hizo patente en cada una de las disciplinas que hemos mencionado la necesidad de dar también un fundamento a aquellos principios tenidos hasta entonces como básicos, como axiomas. Se ofreció entonces una serie de “demostraciones” del carácter lineal de la ecuación del plano y de la ortogonalidad de una transformación que expresara un movimiento. Se “probaron” las leyes de las operaciones aritméticas, el paralelogramo de las fuerzas, las ecuaciones del movimiento de Lagrange, lo mismo que la ley de la emisión y la absorción de Kirchhoff, la ley de la entropía y el principio de la existencia de las raíces de una igualdad.

Pero el examen crítico de estas “demostraciones” puso de manifiesto que, en realidad, no se trataba efectivamente de pruebas. Lo que con ellas se logra, es fundamentalmente una reducción a otras proposiciones, localizadas en un plano más profundo, a las que debemos considerar ahora como axiomas, esto es, como los axiomas que reemplazan a los anteriores. Esta es la manera en la que se obtienen los llamados *axiomas* de la geometría, de la aritmética, de la estática y la mecánica, de la teoría de la radiación y los de la termodinámica. Estos axiomas representan un estrato más profundo de principios axiomáticos que los axiomas mencionados en relación a cada una de esas esferas del conocimiento. El procedimiento del método axiomático, tal y como aquí se hace evidente, equivale a una *ubicación más profunda de los fundamentos* de las ciencias particulares. Como ocurre en el caso de cualquier construcción, esto resulta necesario cuando se quiere seguridad al pasar a niveles superiores.

Ahora bien, si la teoría de una esfera particular del conocimiento, esto es, el aparato conceptual que le es propio, ha de cumplir sus objetivos de orientación y ordenamiento, debe satisfacer ante todo dos exigencias fundamentales. Debe, *en primer lugar*, proporcionarnos una visión de

conjunto de la *dependencia* (o *independencia*) de los enunciados de la teoría; y debe también, *en segundo lugar*, ofrecernos una garantía de la *consistencia* de todos los enunciados de la teoría. Son estos los dos principios que debemos tomar como criterio en el examen de los axiomas de una teoría.

Ocupémonos, en primer término, de la cuestión de la dependencia (o independencia) de los axiomas.

El ejemplo clásico de una prueba de independencia de un principio axiomático nos lo ofrece el *axioma de las paralelas* en la geometría. En realidad, el problema de si el enunciado de las paralelas se encuentra condicionado por los otros axiomas es resuelto ya de manera negativa por Euclides mismo al considerarlo como uno de sus axiomas. El método euclidiano de investigación se convirtió con el tiempo en el prototipo de la investigación axiomática, convirtiéndose también la geometría en un modelo para la construcción axiomática en general.

Otro ejemplo de investigación acerca de la dependencia de los axiomas lo encontramos en la mecánica clásica. Como hemos señalado, las ecuaciones de Lagrange para el movimiento pueden fungir provisionalmente como axiomas de la mecánica. Ciertamente ésta puede basarse enteramente en una formulación general de tales ecuaciones para fuerzas y condiciones secundarias cualesquiera. Sin embargo, un examen más detenido del problema nos muestra que para la construcción de la mecánica no es necesaria la suposición de fuerzas ni de condiciones secundarias arbitrarias, por lo que el conjunto de presuposiciones puede reducirse. Esta circunstancia conduce, por una parte, al sistema axiomático de Boltzmann, que considera solamente fuerzas, o más exactamente: fuerzas centrales, omitiendo toda referencia a las condiciones secundarias; pero, por la otra, conduce también al sistema axiomático de Hertz, que prescinde de las fuerzas y se ocupa exclusivamente de las condiciones secundarias (en especial de aquellas con conexiones fijas). Es claro entonces que estos dos sistemas se ubican en un estrato más profundo en el proceso de axiomatización de la mecánica.

Si en la fundamentación de la teoría de las ecuaciones de Galois consideramos como un axioma la existencia de las raíces de una ecuación, podemos tener la certeza de que lo que obtendremos es un axioma dependiente, pues como Gauss ha mostrado, toda proposición de existencia es demostrable a partir de los axiomas de la aritmética.

Lo mismo ocurre, por ejemplo, en la teoría de los números primos cuando queremos suponer como axioma el principio de la existencia de

los ceros de la función $\zeta(t)$ de Riemann. Al pasar al estrato axiomático más profundo de la aritmética pura nos percatamos de la necesidad de demostrar este principio de existencia, preservando al mismo tiempo sus importantes consecuencias para la teoría de los números primos, consecuencias con las que ahora contamos únicamente gracias a su postulación como axioma.

De particular interés para el enfoque axiomático y la cuestión de la dependencia de los principios de una esfera del conocimiento resulta el axioma de *continuidad*.

En la teoría de los números reales se establece que el axioma de la medida, también conocido como axioma de Arquímedes, es independiente de todos los demás axiomas de la aritmética. Es bien sabida la importancia que este hecho tiene para la geometría. En mi opinión, resulta también de considerable interés para la física en vista de la siguiente consideración. El hecho de que podamos llegar por composición de distancias terrestres a dimensiones y distancias de cuerpos en el espacio, es decir, el hecho de que con una medida terrestre resulten conmensurables las longitudes celestes y que las distancias en el interior del átomo puedan también ser expresadas con una medida métrica, no es una mera consecuencia lógica de los principios relativos a las congruencias triangulares y a la configuración geométrica, sino que constituye un resultado de la investigación empírica. Precisamente en este sentido, la validez del axioma de Arquímedes en la naturaleza requiere de una confirmación experimental, de la misma manera en que —en el sentido que todos conocemos— la requiere el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo.

En general, la formulación del axioma de continuidad que me parece más adecuada en la física es la siguiente:

Si para la validez de un enunciado físico se hace necesario un grado arbitrario de exactitud, entonces es posible encontrar intervalos pequeños dentro de los cuales las suposiciones del enunciado pueden variar libremente, sin que la desviación del enunciado supere el grado requerido de exactitud.

Este axioma expresa lo esencial del experimento. Se trata de un principio constantemente presupuesto por los físicos que hasta ahora no había sido formulado de manera explícita.

El axioma de continuidad resulta así imprescindible, por ejemplo, cuando siguiendo a Planck derivamos el segundo principio del calor a partir del axioma de la imposibilidad de un *perpetuum mobile* del segundo tipo.

Sirviéndose del principio del buen orden del continuo, Hamel ha ofrecido una prueba muy interesante de la necesidad de utilizar el axioma de continuidad para la fundamentación de la estática, en la demostración del enunciado del *paralelogramo de las fuerzas*, por lo menos en lo que se refiere a una cierta y evidente elección de los otros axiomas.

También los axiomas de la mecánica clásica pueden ser objeto de una ubicación más profunda si, sirviéndonos del axioma de continuidad, analizamos el movimiento continuo en movimientos parciales sucesivos rectos y uniformes que son producidos por impulsos, y utilizamos luego el *principio de maximalidad de Bertrand* como el axioma fundamental de la mecánica. De acuerdo con éste, el movimiento que realmente tiene lugar después de cada impulso es siempre aquel en relación al cual la energía cinética del sistema puede verse como el máximo de todos los movimientos compatibles con el principio de conservación de la energía.

No nos ocuparemos aquí de los nuevos tipos de fundamentación de la física (particularmente la electrodinámica) que son en su totalidad teorías del continuo y que plantean, en el sentido más amplio, la exigencia de continuidad. La razón de ello es que se trata, en realidad, de investigaciones que aún están en curso, por lo que su consideración resultaría necesariamente incompleta.

Concentrémonos ahora en el segundo de los puntos de vista que hemos mencionado, esto es, en el problema de la *consistencia* de los axiomas.

Es evidente la importancia que este problema tiene para valorar una teoría. La existencia de contradicciones en ella pone en entredicho la existencia misma de la teoría. Ahora bien, establecer la consistencia interna dista de ser una tarea fácil, aun en el caso de teorías reconocidas y exitosas. Recordemos en este sentido las objeciones, en la teoría cinética de los gases, a la reversibilidad.

Con frecuencia se considera como algo obvio que una teoría sea consistente. Sin embargo, es necesario llevar a cabo un desarrollo matemático de bastante profundidad para demostrarlo. Consideremos como ejemplo un problema de la teoría elemental de la *transmisión del calor*, a saber, la distribución de la temperatura dentro de un cuerpo homogéneo cuya superficie se mantiene a una cierta temperatura variable de acuerdo con el lugar. En tal caso, es un hecho que la exigencia de un equilibrio de la temperatura no significa necesariamente una contradicción en la teoría. Sin embargo, para saber si esto es realmente así, se hace necesario

ofrecer una prueba de que el conocido problema del valor marginal de la teoría potencial es siempre soluble, pues es precisamente la solución de esta dificultad la que establece la posibilidad de un reparto de la temperatura que satisfaga la ecuación de la distribución del calor.

Por lo demás, en la física no resulta nunca suficiente que los enunciados de una teoría sean compatibles entre sí; se requiere también que esos enunciados no contradigan enunciados de alguna otra disciplina cercana.

Así por ejemplo, como he demostrado recientemente, los axiomas de la teoría elemental de la radiación proporcionan no sólo una fundamentación del *principio de Kirchhoff* acerca de la absorción, sino igualmente un principio especial relativo a la reflexión y la refracción de los rayos de luz particulares a saber: si dos rayos de luz natural caen con la misma energía desde lados distintos sobre la superficie de división de dos medios, de tal manera que la dirección que toma el primero después de su incidencia y la que toma el segundo después de su reflexión son la misma, entonces el rayo resultante de su unión es también un rayo de luz natural y posee la misma energía. Es posible demostrar que este principio es enteramente compatible con la óptica y que puede, además, derivarse como consecuencia de la teoría electromagnética de la luz.

Es bien sabido que los resultados de la *teoría cinética de los gases* son compatibles con la *termodinámica*. De manera análoga, la *inercia electromagnética* y la *gravitación einsteiniana* son consistentes con los conceptos correspondientes de las teorías clásicas, en la medida en que éstas se consideren como casos límite de los conceptos generales de las nuevas teorías.

Por el contrario, la *teoría cuántica moderna*, lo mismo que el conocimiento progresivo de la estructura del átomo, ha conducido a leyes que contradicen a la electrodinámica actual, basada esencialmente en las ecuaciones de Maxwell, por lo que resulta evidente la necesidad de reformarla radicalmente y de darle nuevos fundamentos y organización.

Vemos así que en las teorías físicas la supresión de las contradicciones debe lograrse por medio de una modificación en la elección de los axiomas. La única dificultad que ello trae aparejada es la de elegir los axiomas de tal manera que todas las leyes físicas observadas resulten una consecuencia lógica de los mismos.

Algo distinto ocurre con la aparición de contradicciones en esferas del conocimiento cuyo carácter es puramente teórico. El ejemplo clásico

de una situación de este tipo nos lo ofrece la teoría de conjuntos, y, más específicamente, la *paradoja del conjunto de todos los conjuntos* de Cantor. La importancia de esta paradoja es tan grande que matemáticos de la talla de Kronecker y Poincaré se vieron obligados a negarle el derecho a la existencia a la teoría de conjuntos en su totalidad, a pesar de constituir ésta, en nuestra opinión, una de las ramas más fructíferas y vigorosas de las matemáticas en general.

El método axiomático resulta también de gran utilidad para una situación tan delicada como ésta. Zermelo ha presentado un sistema de axiomas adecuado que, por una parte, restringe lo arbitrario de las definiciones de conjuntos, y, por la otra, limita la validez de las afirmaciones acerca de sus elementos¹. A partir de esto, Zermelo logra desarrollar una teoría de conjuntos en la que las contradicciones que hemos estado mencionando desaparecen, y que, a pesar de las restricciones, conserva en lo esencial la fuerza en cuanto a alcance y aplicabilidad de la teoría original.

Hasta ahora, el surgimiento de las contradicciones se ha dado en el curso del desarrollo de una teoría, planteándose la necesidad de su eliminación por medio de modificaciones en el sistema de los axiomas. En el caso de las matemáticas, es decir, cuando se trata de recuperar el prestigio de éstas como modelo de las ciencias exactas, lo anterior no basta. La exigencia de principio de una teoría axiomática debe, más bien, extenderse hasta el punto de mostrar que las contradicciones resultan *imposibles* dentro de una esfera del conocimiento demarcada por un cierto sistema de axiomas.

Esta es precisamente la exigencia que hemos tenido en mente cuando en los *Grundlagen der Geometrie* demostramos la consistencia de los axiomas de esa teoría. El procedimiento seguido allí es el de probar que cualquier contradicción que se presente como consecuencia de los axiomas de la geometría, conduce necesariamente a un resultado similar en la aritmética del sistema de los números reales.

Es evidente que también en las ciencias físicas ocurre con frecuencia que la cuestión de la *consistencia interna* depende de la consistencia de los axiomas de la aritmética. Yo mismo he demostrado en otra parte, por

¹ E. Zermelo, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", *Mathematische Annalen* 65, 1908. [N. de T.]

ejemplo, la consistencia de los axiomas de la *teoría elemental de la radiación*, construyendo un sistema axiomático a partir de porciones analíticamente independientes de la misma y dando por supuesta para todo ello la ausencia de contradicciones en el análisis.

Podemos y debemos proceder de manera similar en la construcción y el desarrollo de una teoría matemática. Consideremos, por ejemplo, la teoría de grupos de Galois. Si en el desarrollo de ésta hemos tomado ya como axioma el teorema de la *existencia de raíces*, o el principio de existencia de los ceros de la función riemanniana $\zeta(t)$ en la teoría de los números primos, la prueba de la consistencia del sistema axiomático equivale precisamente a establecer el principio de la existencia de raíces, o el teorema riemanniano sobre la función $\zeta(t)$, por medios puramente analíticos. Sólo entonces puede garantizarse en forma acabada la teoría en cuestión.

Análogamente, el problema de la consistencia de un sistema de axiomas para los *números reales* remite al problema correspondiente en relación a los números enteros. Este es un resultado de las teorías de Weierstraß y Dedekind para los números irracionales.

Hay, sin embargo, dos casos en los que es evidente que este procedimiento de reducción a una esfera más particular no nos es útil, el del sistema axiomático para los números *enteros* y el de la fundamentación de la *teoría de conjuntos*. No existe, en efecto, en relación a ellos y aparte de la lógica, ninguna disciplina a la que podamos apelar.

Ahora bien, en vista del carácter ineludible de una demostración de consistencia, parecería necesario axiomatizar en primer lugar a la lógica misma y probar luego que tanto la teoría de los números como la de conjuntos no son otra cosa que parte de ella.

Este camino había sido preparado desde hace algún tiempo, entre otros y de manera conspicua por las profundas investigaciones de Frege. Pero ha sido el agudo lógico y matemático B. Russell quien finalmente y con mayor éxito lo ha recorrido. En realidad, podemos considerar que la conclusión de la gran empresa russelliana de una *axiomatización de la lógica* constituye al mismo tiempo la culminación de la tarea de axiomatización en general.

Sin embargo, los resultados de Russell plantean todavía una nueva y versátil tarea. Con esto queremos decir lo siguiente. Una reflexión cuidadosa muestra que el tema de la consistencia en relación a los números enteros y los conjuntos no es algo que podamos considerar de manera aislada, sino que forma parte de una problemática muy amplia,

de gran contenido teórico-cognoscitivo y con características matemáticas específicas. Bastará mencionar aquí algunas de esas dificultades para tener una idea del conjunto de esos problemas en su totalidad. Tenemos, por ejemplo, la de la *solubilidad de cualquier problema matemático*; el problema de la *posibilidad ulterior de control* de los resultados de una investigación matemática; la cuestión de un *criterio para la sencillez* de las demostraciones matemáticas; el problema de las relaciones entre *contenido concreto* [Inhaltlichkeit] y *formalismo* en las matemáticas y la lógica; y también, por último, el problema de la *decidibilidad* de un problema matemático por medio de un número finito de operaciones. No podemos darnos por satisfechos con la axiomatización de la lógica hasta que no hayamos comprendido y aclarado en su contexto todos estos problemas.

Entre las dificultades que hemos mencionado, la más conocida es la relativa a la decidibilidad por medio de un número finito de operaciones. Es, además, la que ha sido con mayor frecuencia objeto de discusiones. La razón de ello reside en que se trata de un problema que afecta profundamente la esencia misma del pensamiento matemático.

Me gustaría contribuir a acrecentar el interés por esta cuestión mencionando algunos problemas matemáticos particulares en los que desempeña un papel importante.

Como sabemos, en la teoría de los *invariantes algebraicos* resulta válido el principio fundamental de que siempre existe un número finito de invariantes racionales, por medio de los cuales todos los demás pueden representarse de una manera enteramente racional. La primera prueba general de esta afirmación, que yo mismo he presentado, satisface del todo las exigencias que pudieran plantearse en cuanto a sencillez y claridad. Sin embargo, resulta imposible modificar esta demostración a modo de obtener con ella un límite determinado del número (finito) de variantes de todo el sistema u ofrecer de plano una representación específica de las mismas.

Más bien se hace necesario introducir ideas completamente distintas, además de nuevos principios, para poner de manifiesto que la especificación de la totalidad del sistema de invariantes requiere simplemente un número finito de operaciones, y que este número se encuentra, por debajo de un cierto límite, señalado antes de la realización de esas operaciones.

Algo parecido ocurre en relación a un ejemplo tomado de la *teoría de las superficies*. Uno de los problemas principales en la geometría de las superficies de cuarto grado es el de determinar el número máximo de ho-

jas² separadas de que puede consistir una superficie de ese tipo. Lo primero que tiene que hacerse para la resolución de este problema es dar una demostración de que el número de hojas es finito. Esto puede llevarse a cabo fácilmente recurriendo a la teoría de funciones. Supongamos, en efecto, que existe un número infinito de hojas. Elijamos ahora un punto en cada una de las porciones del espacio acotadas por una hoja. Un punto de acumulación de la infinidad de puntos elegidos sería de tal tipo de singularidad que resultaría imposible para una superficie algebraica.

Este procedimiento, basado en la teoría de las funciones, no conduce en forma alguna a una cota superior para las hojas de las superficies. Para ello sería necesario hacer una reflexión acerca del número de puntos de intersección; pero esto nos haría ver que el número de las hojas no puede nunca ser mayor de 12.

El segundo método difiere esencialmente del primero y no puede aplicarse a este problema, ni modificarse para hacer posible una decisión en cuanto a si realmente existe una superficie del cuarto grado con 12 hojas.

Ahora bien, una forma cuaternaria de cuarto grado posee 35 coeficientes homogéneos. Por lo tanto, podemos representarnos una superficie determinada de cuarto grado por medio de un punto en el espacio de 34 dimensiones. El grado del discriminante de la forma cuaternaria de cuarto grado en los coeficientes de la misma es 108. De acuerdo con ello, cuando se iguala a cero, representa una superficie de grado 108 en el espacio de dimensión 34. Por otra parte, como los coeficientes del discriminante son ellos mismos números enteros definidos, el carácter topológico de la superficie de los discriminantes puede determinarse de manera exacta de conformidad con las reglas comunes para los espacios de 2 y 3 dimensiones. De este modo, podemos obtener una información precisa sobre la naturaleza y el significado de cada una de las regiones en que la superficie de los discriminantes divide al espacio de dimensión 34.

Todas las superficies de cuarto grado representadas por puntos de las regiones en cuestión poseen el mismo número de hojas, por lo que resulta posible comprobar por medio de un cálculo finito, aunque

² El término utilizado por Hilbert es el de *Mänteln*, empleado usualmente para denotar a las *cubiertas* de una superficie, sin embargo, como se verá en el contexto de este problema, Hilbert se refiere a las componentes irreducibles reales de una superficie que son llamadas las hojas de la superficie. [N. de Ed.]

complicado y largo, si existe o no una superficie de cuarto grado con n hojas, $n \leq 12$.

Podemos concluir entonces que este tipo de consideraciones geométricas constituye una tercera vía para el tratamiento del problema acerca del número máximo de hojas de una superficie de cuarto grado, estableciendo al mismo tiempo la decidibilidad del problema por medio de un número finito de operaciones. Con ello se logra, en principio, un avance considerable en la resolución de nuestra problemática, pues ésta se reduce ahora a algo similar a la dificultad de conocer la $10^{(10^{10})}$ -ésima cifra del desarrollo decimal de π , es decir, a algo cuya solubilidad resulta evidente, pero cuya solución de hecho se ignora.

Fue necesario un difícil y profundo trabajo de investigación en geometría algebraica, llevada a cabo por Rohn para percatarnos de la imposibilidad de que una superficie de cuarto grado tenga 11 hojas, sin embargo hay ejemplos de superficies con 10 hojas. Únicamente la aplicación de este cuarto método nos permite una solución completa del problema³.

Todos estos ejemplos ponen claramente de manifiesto qué tan diversos pueden ser los métodos de demostración aplicables a un problema. Los hemos expuesto aquí con el objeto de hacer hincapié en la importancia y necesidad de un estudio detallado del concepto mismo de demostración matemática si es que queremos alcanzar una explicación plausible de ciertas dificultades, como la de la decidibilidad por medio de un número finito de operaciones.

Todos los problemas básicos que hemos caracterizado, de entre los cuales este último no es sino uno más, conforman un nuevo e importante campo de investigación. Su exploración y desarrollo requieren esencialmente de un estudio a fondo del concepto de demostración matemática, de manera análoga a como el astrónomo está obligado a considerar el movimiento de su punto de referencia, el físico a preocuparse por la teoría de sus instrumentos y el filósofo a hacer una crítica de la razón.

³ Este problema forma parte del problema número 16 (problema de la topología de curvas y superficies algebraicas) planteado por Hilbert en su conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticas en París en 1900. En 1913 K. Rohn analiza parte de este problema y utiliza el término *óvalos* [Ovalen] para denotar las hojas "... Aquí se demuestra que una superficie de cuarto grado puede tener a lo más diez óvalos y que éstos se encuentran en una situación muy especial entre sí." K. Rohn, *Math. Ann.*, 73, 1913. [N. de Ed.]

Es claro que la realización de esta tarea constituye todavía un problema a resolver en las matemáticas.

Para terminar, he aquí expresada en pocas frases nuestra concepción general del método axiomático.

Todo lo que puede ser objeto del pensamiento científico cae, con tal de que haya alcanzado un cierto grado de madurez que le permita conformar una teoría, en el terreno propio del método axiomático, y, por lo tanto, de manera mediata en el de las matemáticas. Penetrar, en el sentido que hemos indicado, en niveles axiomáticos más profundos, significa también alcanzar una visión mucho más profunda de la naturaleza y la esencia del pensamiento científico, y dar un paso significativo en el proceso de toma de conciencia de la unidad esencial del conocimiento. En virtud de su estrecha relación con el método axiomático, las matemáticas parecerían llamadas a ocupar un lugar prominente en la ciencia en general.