Acerca del infinito

Sin lugar a dudas, el análisis matemático debe a la profunda crítica de Weierstraß su fundamento definitivo. Con sus precisas definiciones de nociones como mínimo, función y derivada, Weierstraß ha contribuido de manera fundamental a subsanar las deficiencias que permeaban hasta entonces el cálculo infinitesimal, al eliminar ideas poco claras y abstrusas acerca de lo infinitamente pequeño y al superar, de una vez por todas, las dificultades que surgen en relación a este concepto.

El acuerdo total y la seguridad completa que en nuestros días reinan en el análisis en lo relativo a las argumentaciones que involucran el concepto de número irracional y, en general, de límite, se deben en gran medida al trabajo científico de Weierstraß. Y algo parecido puede afirmarse acerca de la teoría de las ecuaciones diferenciales e integrales. A pesar de las aplicaciones verdaderamente audaces que en ella se hacen de una gran gama de combinaciones de superposición, yuxtaposición y encaje de límites, es posible constatar la existencia de una unanimidad esencial al respecto, y el logro de ésta se debe fundamentalmente a Weierstraß.

Sin embargo, la fundamentación weierstrassiana del cálculo infinitesimal se encuentra todavía lejos de representar el punto final de la discusión acerca de los fundamentos del análisis.

La razón de ello reside en el hecho de que el significado del *infinito* para las matemáticas aún no ha sido elucidado de una manera plenamente satisfactoria. Por supuesto, al transformar los enunciados que involucran lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande en afirmaciones que se refieren a relaciones entre magnitudes finitas, Weierstraß se encuentra en condiciones de desterrar esos conceptos del análisis. Sin embargo, el infinito continúa estando presente cuando hablamos de las sucesiones numéricas infinitas que definen a los números reales, al igual que en la noción misma de un sistema de tales números, al que normalmente se considera como una totalidad acabada y completa.

Las formas de la inferencia lógica en las que esta concepción del infinito se pone de manifiesto (por ejemplo, cuando se habla de *todos* los números reales que poseen una cierta propiedad, o de que *existen* números reales con tales y cuales características) son requeridas y utilizadas de manera irrestricta en el análisis de Weierstraß.

Debido a esta circunstancia, el infinito ha podido deslizarse, de manera disimulada, en la teoría de Weierstraß sin ser afectado en lo esencial por su crítica.

De todo ello se sigue la imperiosa necesidad de elucidar finalmente, de manera definitiva y en el sentido que acabamos de indicar, el *problema del infinito*. Ahora bien, así como en los procesos de *paso al límite* del cálculo infinitesimal se demuestra que el infinito en el sentido de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande no es sino una simple forma de hablar, también debemos mostrar que el infinito, en tanto que totalidad infinita, tal y como ésta se pone de manifiesto en los principios de inferencia usuales, es algo meramente aparente.

De manera análoga a como las operaciones con lo infinitamente pequeño fueron sustituidas por procesos en el ámbito de lo finito con los que podemos llegar exactamente a los mismos resultados y a las mismas y elegantes relaciones formales, debemos ahora reemplazar las argumentaciones con lo infinito por procesos finitos que nos conduzcan a lo mismo, es decir, que hagan posibles las mismas demostraciones y los mismos métodos de obtención de fórmulas y teoremas.

Es ésta precisamente la intención principal de mi teoría. Es decir, mi teoría se propone como objetivo central conferir una seguridad definitiva al método matemático, una seguridad a la que el período crítico del cálculo infinitesimal no pudo llegar. En otras palabras, nuestra meta es concluir la tarea que Weierstraß intentaba llevar a cabo con la fundamentación del análisis y para la cual dio un paso absolutamente necesario y fundamental.

Si queremos llevar a cabo una verdadera elucidación del concepto de infinito es necesario adoptar una perspectiva más general. La literatura matemática está plagada de absurdos y errores debidos, en gran medida, al infinito. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, cuando a manera de condición restrictiva se afirma que en la matemática rigurosa, una demostración es aceptable únicamente cuando consta de un número *finito* de inferencias. ¡Cómo si en alguna ocasión alguien hubiera sido capaz de llevar a cabo un número infinito de inferencias!

Pero también las viejas objeciones que habíamos considerado como algo ya superado se presentan nuevamente, ahora bajo una nueva vestimenta. Así, por ejemplo, se argumenta que aunque es posible la introducción de un concepto sin que ello represente peligro alguno, esto es, sin que dé lugar a contradicciones —y aun pudiendo probarlo— esto no basta como justificación. Pero, ¿no es esta precisamente la misma objeción que se hacía no hace mucho a los números complejos cuando se decía que aunque era claro que tenerlos no podía ser la causa de contradicciones, su introducción no era algo justificado porque, en realidad, las cantidades imaginarias no existen?

Ahora bien, si aparte de una prueba de consistencia ha de tener algún sentido el problema de la justificación de un procedimiento, lo único que esto puede significar es que ese procedimiento sea fecundo en resultados. De hecho, el éxito resulta en este contexto algo necesario, la instancia suprema a la que todo el mundo se somete.

Otro autor parece ver contradicciones, cual fantasmas, inclusive cuando nadie ha hecho ningún tipo de afirmaciones, esto es, en el mundo concreto de lo sensible, cuyo "funcionamiento consistente" se considera como una hipótesis especial.

Siempre he creído que lo único que puede dar lugar a contradicciones son las afirmaciones y las hipótesis, en tanto que conduzcan, por medio de inferencias, a otras afirmaciones, por lo que la idea misma de una contradicción entre los hechos me parece un ejemplo paradigmático de descuido conceptual y absurdo.

Todas estas observaciones tienen como sola intención hacer claro que la elucidación definitiva de la *naturaleza del infinito* es algo que va mucho más allá del ámbito de los intereses científicos particulares, algo que, en realidad, se ha convertido en una *cuestión de honor para el entendimiento humano.*

Como ningún otro problema, el del infinito ha inquietado desde los tiempos más remotos el *ánimo* de los hombres. Ninguna otra *idea* ha sido tan estimulante y fructífera para el entendimiento. Pero, como ningún otro *concepto*, requiere de *precisión y esclarecimiento* satisfactorios.

Es necesario tener presente, ahora que nos abocamos a esta tarea de clarificación del infinito, el significado concreto que éste posee en la realidad.

Examinemos, en primer lugar, lo que la física nos dice al respecto.

La primera y más intuitiva impresión que tenemos de la naturaleza y la materia es la de algo continuo. Así, por ejemplo, si tenemos un trozo de metal o un cierto volumen de algún líquido, la idea que inmediatamente se nos impone es la de que se trata de algo que puede ser subdividido ilimitadamente y que cualquier porción del mismo por pequeña que sea posee también las mismas características.

Sin embargo, en todos los terrenos en los que la física de la materia ha logrado refinar adecuadamente sus métodos de investigación se ha topado con límites a esa divisibilidad y ha hallado que esos límites no residen en la insuficiencia de nuestros intentos, sino en la naturaleza misma de los objetos.

Podríamos entonces describir la tendencia dominante en la ciencia moderna como una especie de emancipación de lo infinitamente pequeño, de tal manera que en lugar del viejo principio de que *natura non facit saltus*, podríamos afirmar ahora precisamente lo contrario, esto es, que "la naturaleza sí da saltos".

Como se sabe, toda la materia se compone de pequeños bloques, los *átomos*, cuya combinación y unión da origen a la multiplicidad de los objetos macroscópicos. Sin embargo, la física no se ha detenido en la teoría atómica de la materia. A finales del siglo pasado aparece al lado de ésta una teoría a primera vista extraña, la teoría atómica de la electricidad. Hasta entonces se había pensado en la electricidad como en un fluido, teniéndosela, además, como el modelo de un agente de acción continua. La nueva concepción atomista la concibe en oposición a ello como algo conformado por *electrones* positivos y negativos.

Existe otra realidad, aparte de la materia y la electricidad, que la física considera y para la cual es también válida la ley de la conservación, a saber, la energía. Pero como ahora sabemos, ni siquiera ésta es susceptible, sin más, de una división infinita e irrestricta: Planck descubrió que la energía se presenta en *quanta*.

Podemos entonces concluir que en ninguna parte de la realidad existe un continuo homogéneo que pueda ser ilimitadamente divisible y que constituyera de algún modo una realización del infinito en la esfera de lo pequeño.

La divisibilidad infinita de un continuo es "exclusivamente" una operación del pensamiento, una idea que la observación de la naturaleza y la experimentación en la física y la química refutan.

La observación del universo como un todo constituye un segundo sitio en el que nos enfrentamos al problema del infinito en la naturaleza. La dificultad que aquí se nos plantea es la de examinar la extensión del mundo y determinar si en ella existe algo infinitamente grande.

Durante mucho tiempo se pensó que el universo era infinito. Hasta Kant —e inclusive después de él— el carácter infinito del espacio se tuvo como algo indubitable. La ciencia contemporánea, en especial la astronomía, ha planteado de nueva cuenta el problema, abordándolo esta vez no con los inadecuados recursos de la especulación metafísica, sino apoyándose en la experiencia y recurrriendo a las leyes de la naturaleza. Como resultado de este proceso se han hecho objeciones fundamentales en relación a la existencia del infinito.

La suposición de un espacio infinito es una consecuencia directa, necesaria, de la geometría *euclidiana*. Por sí misma, ésta representa un sistema conceptual consistente. Sin embargo, de ello no se sigue que este sistema sea de alguna manera aplicable a la realidad. Más bien, esta cuestión únicamente puede ser decidida por medio de la observación y la experiencia.

El intento de demostrar especulativamente el carácter infinito del espacio presenta igualmente una serie de evidentes errores. En efecto, a partir del hecho de que fuera de cualquier porción del espacio exista siempre otra, solamente se sigue que éste es ilimitado [unbegrenzt], pero de ninguna manera que sea infinito. Ilimitado y finito no son necesariamente incompatibles. Con la geometría *elíptica*, las matemáticas nos ofrecen el modelo natural de un mundo finito. Por lo demás, el abandono en la actualidad de la geometría euclidiana ha dejado de ser una especulación puramente matemática o filosófica, pues hemos llegado a esa decisión a partir de otro tipo de consideraciones que no tienen, en su origen, absolutamente ninguna conexión con el problema de si el mundo es o no finito.

Einstein ha hecho ver la necesidad de apartarse de la geometría euclidiana y ha abordado los problemas cosmológicos con base en su teoría de la gravitación. Con ello ha demostrado la posibilidad de un mundo finito, estableciendo también la esencial compatibilidad de los resultados de la astronomía con la suposición de un mundo elíptico.

Podemos entonces decir que hemos constatado el carácter finito de la realidad en dos direcciones, en la esfera de lo infinitamente pequeño y en la de lo infinitamente grande. Podría ocurrir, no obstante, que el lugar propio y justificado del infinito no sea la realidad, sino *nuestro pensamiento.* Y podría muy bien resultar que en éste el infinito asuma una función conceptual absolutamente imprescindible.

Nuestro objetivo en lo que sigue es examinar lo que ocurre en las matemáticas con este concepto. Plantearemos para ello el problema, en primer lugar, en la esfera de lo que puede considerarse la criatura más pura e ingenua del espíritu humano, la teoría de los números.

Consideremos una cualquiera de entre la rica multitud de las fórmulas elementales. Por ejemplo,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)\,.$$

n puede ser reemplazado en ella por cualquier número entero (por ejemplo por el 2 o por el 5), por lo que esta fórmula contiene, en realidad, una *infinidad* de proposiciones. Es esto precisamente lo esencial de la misma, y es gracias a ello que puede representar la solución de un problema aritmético y requerir de un genuino argumento para su prueba, mientras que cada una de las ecuaciones numéricas específicas

$$1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11,$$

puede ser verificada directamente ejecutando las operaciones apropiadas, por lo que ninguna de ellas tiene, por sí misma, un interés esencial.

El útil e importante método de los *elementos ideales* nos ofrece una interpretación y una concepción enteramente distintas del concepto de infinito. Este método ha sido ya objeto de aplicaciones en la geometría plana elemental. En ésta, los puntos y las rectas del plano constituyen los únicos objetos reales originales y con una existencia verdadera. Para estos objetos resulta válido el axioma de conexión: a través de dos puntos cualesquiera pasa una y solamente una línea recta.

De esto último se obtiene como consecuencia que dos rectas se intersectan a lo más en un punto. Sin embargo, la proposición de que dos rectas se intersectan siempre en un punto no es verdadera, pues pueden muy bien ser paralelas.

Como sabemos, es precisamente gracias a la introducción de elementos ideales, esto es, a la introducción de puntos al infinito y de una recta al infinito que se logra que la proposición de que dos rectas se intersectan siempre en un solo punto resulte universalmente válida.

Los elementos ideales "al infinito" poseen la ventaja de simplificar considerablemente el sistema de las leyes de conexión, permitiendo al mismo tiempo una visión global del mismo. Por otra parte, es bien sabido que la simetría entre punto y recta hace posible obtener en la geometría un principio tan útil y fructífero como el de dualidad.

Otro ejemplo de la utilidad de los elementos ideales lo encontramos en las magnitudes *complejas* ordinarias del álgebra. Con ellas podemos simplificar los teoremas relativos a la existencia y el número de raíces de una ecuación.

Por lo demás y de igual manera que en la geometría se utiliza una infinidad de líneas paralelas entre sí para la definición de un punto ideal, también en la aritmética superior confluyen en un *número ideal* ciertos sistemas acerca de un infinito de números. Posiblemente esta es la aplicación más genial que se ha dado al principio de los elementos ideales en las matemáticas. Cuando algo como lo que acabamos de describir ha ocurrido en general dentro de un campo algebraico es fácil recuperar en él las sencillas y conocidas leyes de la divisibilidad para los enteros 1, 2, 3, 4, ... , con lo cual nos hallaríamos ya en el terreno de la aritmética superior.

Ocupémonos ahora del análisis, que bien podría ser considerado como la rama más ingeniosa y más refinadamente elaborada de las matemáticas. No es necesario señalar aquí el papel absolutamente fundamental que en él desempeña el infinito. En cierto sentido, el análisis matemático no es sino una sinfonía del infinito.

Los enormes e impresionantes avances llevados a cabo en el cálculo infinitesimal descansan en gran medida en la operación de sistemas matemáticos con una infinidad de elementos. Ahora bien, parecía bastante natural identificar infinito con "muy grande", por lo que no tardaron en aparecer las primeras contradicciones, las llamadas paradojas del cálculo infinitesimal, en parte ya conocidas por los sofistas desde la Antigüedad.

Un logro de suma importancia en este sentido fue el reconocimiento del hecho de que muchos principios válidos para la esfera de lo finito, *v.gr.* que la parte es siempre menor que el todo, la existencia de un mínimo y un máximo, la posibilidad de cambiar el orden de los sumandos o de los factores, etc., no pueden trasladarse sin más al ámbito de lo infinito.

La elucidación completa de todas estas cuestiones se debe, como ya he mencionado al inicio de mi exposición, a Weierstraß. En nuestros días, el análisis representa, para el campo de estudio del que se ocupa, una guía imprescindible, al mismo tiempo que una herramienta de inmenso valor práctico para el manejo del infinito.

Sin embargo, por sí solo el análisis resulta insuficiente para proporcionarnos una visión de la más profunda esencia del infinito. Esta visión la encontramos más bien en la teoría de conjuntos de Georg Cantor, una disciplina mas cercana a un enfoque filósofico general que ubica todo el complejo de problemas relativo al infinito en una nueva perspectiva. Lo que aquí nos importa de ella es precisamente aquello que en verdad constituye su núcleo fundamental, esto es, la *teoría de los números transfinitos*. En mi opinión, el sistema de Cantor constituye no sólo la flor más admirable que el espíritu matemático ha producido, sino igualmente uno de los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general.

Si quisieramos dar expresión en pocas palabras a la nueva concepción del infinito introducida por Cantor, podríamos decir lo siguiente. En el análisis enfrentamos lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande solamente como un concepto límite [Limesbegriff]— algo que se encuentra en devenir, en surgimiento, algo que se está generando—. En otras palabras, en el análisis hablamos del infinito como de un *infinito potencial*. Pero el infinito verdadero, el infinito propiamente dicho es algo distinto. Es precisamente éste al que nos enfrentamos cuando, por ejemplo, consideramos la totalidad de los números enteros positivos $1, 2, 3, 4, \ldots$ como una unidad acabada, o cuando pensamos en los puntos de un segmento como una totalidad de objetos que tenemos ante nosotros como algo terminado. A esta forma del infinito se le conoce como el *infinito actual*.

Frege y Dedekind, ambos grandes investigadores de los fundamentos de las matemáticas, recurren, cada uno por su parte, al infinito actual con el objeto de dar a la aritmética una base puramente lógica independiente de toda intuición y toda experiencia y de deducirla exclusivamente a partir de ésta.

De hecho, en la teoría de Dedekind, los números finitos no se derivan de la intuición, sino que se obtienen puramente a partir de la lógica, haciendo uso esencial del concepto de conjunto infinito. El desarrollo sistemático del concepto del infinito actual se debe, sin embargo, a Cantor.

Examinemos con cuidado los dos ejemplos que hemos presentado.

1. 1, 2, 3, 4, ...

2. los puntos del intervalo 0,1, o, lo que es lo mismo, la totalidad de los números reales entre 0 y 1.

Lo más natural parecería considerarlos únicamente desde el punto de vista de la cantidad de elementos que contienen [Vielheitsstandpunkt]. Sin embargo, si lo hacemos así, podremos constatar los sorprendentes resultados que hoy en día todo matemático conoce.

Consideremos, por ejemplo, el conjunto de todos los números racionales, esto es, el de todas las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{3}{7}, \ldots$ Desde el punto de vista de la cantidad de elementos que contienen es claro que este conjunto no es mayor que el de los números enteros. Decimos entonces que los racionales pueden enumerarse, esto es, que el conjunto es numerable. Esto mismo es también válido para el conjunto de los números que resultan de extraer raíces y, en general, para el de todos los números algebraicos.

Algo similar ocurre con el segundo de nuestros ejemplos. En contra de lo que podrían ser nuestras expectativas, el conjunto de todos los puntos en un cuadrado o en un cubo tampoco es mayor, desde el punto de vista de la cantidad de elementos que contienen, que el conjunto de los puntos en el segmento de la recta que va de 0 a 1. Y exactamente lo mismo pasa con el conjunto de las funciones continuas.

Alguien que se ve confrontado por primera ocasión con todos estos hechos bien podría pensar que, en realidad, desde el punto de vista de la cantidad de elementos, no existe sino un único infinito. Sin embargo, no es así.

De hecho, ya los conjuntos de nuestros ejemplos 1 y 2 no tienen, como ahora se dice, "la misma potencia" [gleich mächtig]. El segundo conjunto no es numerable y es mayor que el primer conjunto. Es este precisamente el punto en el que Cantor da inicio al vuelco característico en la formación de sus ideas. Los puntos de la recta no pueden ser enumerados a la manera usual, esto es, usando 1, 2, 3, ...

No obstante, una vez que hemos aceptado la existencia del infinito actual, nuestra enumeración no tiene por qué restringirse a esta forma de contar; no hay razón alguna para terminar en ella. Después de haber contado 1, 2, 3, ... podemos considerar los objetos así enumerados como un conjunto terminado infinito ordenado de esa manera. Designemos ahora este orden, de acuerdo con su tipo y siguiendo a Cantor, con ω.

Nuestra enumeración puede ahora continuar de manera natural con $\omega + 1$, $\omega + 2$ ... hasta $\omega + \omega$ (esto es, hasta $\omega \cdot 2$) y seguir luego con $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2$, $\omega \cdot 2 + 3$ ..., $\omega \cdot 2 + \omega = \omega \cdot 3$. Tendríamos más adelante $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 3$, $\omega \cdot 4$ ..., $\omega \cdot \omega = \omega^2$, $\omega^2 + 1$.... Podríamos consignar nuestros resultados en la siguiente tabla.

$$
\begin{array}{l}
1, 2, 3, \ldots \\
\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots \\
\omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots \\
\omega \cdot 3, \omega \cdot 3 + 1, \omega \cdot 3 + 2, \ldots \\
\omega^2, \omega^2 + 1, \ldots \\
\omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega \cdot 2, \omega^2 + \omega \cdot 3, \ldots \\
\omega^2 \cdot 2, \ldots \\
\omega^2 \cdot 2 + \omega, \ldots \\
\omega^3, \ldots \\
\omega^4, \ldots \\
\omega^\omega, \ldots \\
\quad .
\end{array}
$$

Estos son los primeros números cantorianos transfinitos, o, como dice el mismo Cantor, los números de la segunda clase. La manera de llegar a ellos consiste entonces en llevar el procedimiento de conteo más allá [Hinüberzählen] del infinito numerable ordinario, esto es, en una continuación natural, unívocamente determinada y sistemática de la numeración finita usual. Y así como hasta ahora contábamos el primer objeto de un conjunto, el segundo, el tercero,..., contamos ahora también los objetos que siguen. Esto es, contamos el ω-ésimo objeto del conjunto, el $\omega + 1$-ésimo, el $\omega + 2$-ésimo, ... , el ω^ω-ésimo, etc.

Es evidente que la primera cuestión que se plantea en relación a todo ello es la de si con estos números transfinitos es realmente posible contar conjuntos que en el sentido usual del término no son numerables.

Cantor ha logrado desarrollar con éxito estas ideas, dando forma a una teoría de los números transfinitos y a un cálculo completo para los mismos. De este modo y como culminación del trabajo conjunto de Frege, Dedekind y Cantor, el infinito alcanzaría vertiginosamente el pináculo del éxito en las matemáticas.

Sin embargo, la reacción a todo ello no tardó en hacerse sentir y asumió formas en extremo dramáticas. En realidad, todo ocurrió de manera exactamente análoga a como había sucedido en el caso del cálculo infinitesimal. El entusiasmo que los nuevos y fructuosos resultados suscitaron entre los matemáticos dio lugar a una actitud muy poco crítica en relación a la validez de los modos de inferencia que los sustentaban. Los principios y métodos utilizados para la formación de conceptos permitían el surgimiento de contradicciones. Las primeras inconsistencias se presentaron de manera aislada, pero adquirieron gradualmente mayor gravedad al surgir las llamadas paradojas de la teoría de conjuntos. Fue, en especial, la contradicción descubierta por Zermelo y Russell la que, al ser dada a conocer al mundo matemático, tuvo prácticamente el efecto de una catástrofe en nuestra disciplina.

A causa de estas paradojas, tanto Dedekind como Frege abandonan la posición que habían sustentado hasta entonces e inclusive la rama misma de la investigación que los había ocupado por tanto tiempo. De hecho, durante años Dedekind se mostró renuente a autorizar una nueva edición de su fundamental tratado *Was sind und was sollen die Zahlen?*[1] [1888], mientras que Frege se vio obligado, como él mismo reconoce en una nota al final de los *Grundgesetze der Arithmetik*[2] [1893, 1903], a admitir como errónea la tendencia general de ésta, su obra más importante.

A consecuencia de todo esto, también la teoría de los números transfinitos de Cantor es objeto de severos y apasionados ataques provenientes de los más diversos ámbitos. La reacción es tan radical y en ocasiones tan desmesurada que pone en tela de juicio muchos de los conceptos fundamentales y muchas de las argumentaciones y los métodos más importantes de las matemáticas, llegándose al grado de sugerir una prohibición total de sus aplicaciones.

Ciertamente no faltaron los defensores de lo que parecía derrumbarse, pero las medidas de protección y las soluciones que sugieren son

---

1 *¿Qué son y qué significan los números?* [N. de T.]
2 *Las leyes fundamentales de la aritmética.* [N. de T.]

más bien débiles, además de que se trata, en general, de llevarlos a la práctica en puntos que no siempre son los más apropiados. Se ofrecen demasiados remedios para las paradojas; pero los métodos de clarificación propuestos distan de tener homogeneidad.

Lo primero que tenemos que hacer es percatarnos con toda claridad que, a la larga, las paradojas nos colocan en una situación absolutamente intolerable. Imaginemos simplemente lo que sucedería si en el paradigma de verdad y confiabilidad científicas que las matemáticas representan, las construcciones conceptuales y las inferencias que nos son familiares nos condujeran a absurdos. ¿En dónde podríamos buscar la certeza y la verdad si el pensamiento matemático mismo falla?

Por fortuna, existe una vía enteramente satisfactoria que con absoluto apego al espíritu de nuestra disciplina nos permite escapar de las paradojas. Las consideraciones y las metas que orientan este camino son las siguientes.

1. Queremos examinar con todo cuidado aquellas construcciones conceptuales y aquellos métodos de investigación que enriquezcan a nuestra disciplina, queremos cultivarlos, apoyarlos y servirnos de ellos siempre que se presente la más ligera posibilidad de obtener un resultado. Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.

2. Es absolutamente necesario alcanzar en los modos de inferencia el mismo grado de seguridad que la que existe en la teoría ordinaria elemental de los números, en la que todo el mundo confía plenamente y en la que una paradoja o una contradicción sólo pueden surgir por nuestra falta de atención.

Es evidente que la realización cabal de estos fines será posible sólo si somos capaces de clarificar por completo la *esencia del infinito.*

Como anteriormente hemos visto, podemos recurrir a la ciencia que queramos y llevar a cabo el tipo de observaciones y las experiencias que deseemos sin encontrar nada a lo que podamos llamar infinito. En otras palabras, en ninguna parte de la realidad existe el infinito. Pero, ¿es el pensamiento de las cosas algo tan diverso de los eventos en los que estas cosas intervienen? ¿Se aleja el pensamiento tanto de la realidad? ¿No ocurre más bien que cuando creemos conocer el infinito como algo en algún sentido real sólo nos dejamos engañar por el hecho de que en la realidad ciertamente nos topamos con frecuencia tanto en la esfera de lo grande como en la de lo pequeño con dimensiones tan inmensas? Y ¿no estará fallando en alguna parte la inferencia lógica concreta [das inhaltliche logische Schliessen] y dejando de satisfacer nuestras expectativas cuando la aplicamos a objetos o sucesos reales?

La respuesta a esto último es definitivamente negativa. La deducción lógica concreta es absolutamente indispensable. Sólo puede conducirnos a errores cuando aceptamos construcciones conceptuales arbitrarias, en particular aquellas que se aplican a una infinidad de objetos.

Lo que en tales casos sucede es que hemos usado de manera ilícita la inferencia lógica concreta, es decir, hemos hecho caso omiso de condiciones previas y necesarias para su aplicación.

Por lo demás, en esta observación relativa a la existencia de condiciones de aplicabilidad de tales deducciones e inferencias y de la necesidad de su cumplimiento satisfactorio coincidimos plenamente con la filosofía, en particular con Kant.

Kant nos enseña, en efecto, en una de las partes centrales de su filosofía, que las matemáticas poseen un contenido [Inhalt] propio e independiente de la lógica, y que, en consecuencia, ésta no puede nunca constituir por sí sola un fundamento para aquéllas.

Se sigue de esto que los intentos de Frege y Dedekind estaban desde un principio condenados al fracaso. La existencia de algo dado en la representación, de ciertos objetos extralógicos concretos, presentes intuitivamente como vivencia inmediata, previa a todo pensamiento, es una condición necesaria para la aplicación de las inferencias lógicas y el funcionamiento de las operaciones de este tipo.

Es necesario entonces, si es que hemos de tener a nuestra disposición deducciones e inferencias lógicas confiables, que los objetos sean susceptibles de una visión global completa de todas sus partes y que su presencia, sus diferencias mutuas, su ordenación, su sucesión o su concatenación acompañe a los objetos, al mismo tiempo, como algo dado de manera inmediata en la intuición, como algo irreductible a cualquier otra cosa, como algo que ya no requiere de ninguna reducción.

Esta es la concepción filosófica fundamental que, en mi opinión, resulta necesaria no sólo para las matemáticas, sino también para todo pensamiento, toda comprensión y toda comunicación científicos.

En el caso particular de las matemáticas, el objeto preciso de nuestro examen lo constituyen los signos concretos mismos, cuya forma es, en consonancia con el punto de vista que hemos adoptado, inmediatamente clara y reconocible.

Recordemos nuevamente en qué consiste la teoría finitista usual de los números y cuáles son sus métodos. Es claro que ésta puede obtenerse por medio de una serie de consideraciones concretas intuitivas, recurriendo exclusivamente a construcciones numéricas. Pero es también evidente que las matemáticas no se agotan en forma alguna en las ecuaciones numéricas y que tampoco pueden reducirse a éstas.

Sin embargo, podemos perfectamente defender la idea de que, en realidad, las matemáticas no son sino una especie de aparato que al ser aplicado a números enteros debe proporcionarnos siempre igualdades numéricas verdaderas. El problema que en ese caso se plantea es el de investigar la construcción de ese aparato hasta el punto en el que toda duda al respecto haya desaparecido.

Ahora bien, para llevar a cabo esta tarea no tenemos a nuestra disposición otros medios que el mismo enfoque concreto [konkret inhaltliche Betrachtungsweise] y el mismo enfoque finitista del pensamiento que ya habíamos utilizado en la construcción de la teoría de los números para obtener las igualdades numéricas.

Es un hecho que tenemos la capacidad de satisfacer esta exigencia de la ciencia, es decir, es posible obtener de manera puramente intuitiva y finitista, tal y como ocurre con las verdades de la teoría de los números, aquellas ideas y aquellos resultados que garantizan la plena confiabilidad del aparato matemático.

Ocupémonos ahora con mayor detalle de la teoría de los números

En esta teoría tenemos los numerales [Zahlzeichen]

1, 11, 111, 11111.

A cada uno de estos numerales lo podemos reconocer por el hecho de que al 1 siempre le sigue el 1. Estos numerales que estamos considerando carecen de todo significado.

Pero ya en la teoría elemental de los números necesitamos, además de estos signos, de otros con los que podamos expresar significados y que nos sean útiles para la comunicación (por ejemplo, del signo 2 como abreviatura de 11, de 3 como abreviatura de 111, etc.). Nos serviremos, además, de los signos +, =, >, y de otros para comunicar información. Así, *v.gr.* $2 + 3 = 3 + 2$ nos hace saber que $2 + 3$ y $3 + 2$ son, en realidad, tomando en cuenta las abreviaturas que estamos usando, el mismo numeral, esto es, 11111. De manera análoga, podemos expresar con $3 > 2$ el hecho de que el signo 3, es decir, 111 se extiende más allá del signo 2, esto es, que 11; o equivalentemente, que este último es un segmento propio del primero.

Para expresar y comunicar nos serviremos también de las letras góticas $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ para referirnos a numerales. De acuerdo con ello,

$$\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$$

nos dice que el numeral $\mathfrak{b}$ tiene mayor extensión que el numeral $\mathfrak{a}$. De manera similar,

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

solamente estaría expresando que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ es el mismo numeral que $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. La corrección concreta de esta afirmación puede ser demostrada mediante inferencias materiales.

Vemos entonces que con este tipo de tratamiento intuitivo y concreto es posible llegar bastante lejos.

Deseo presentar a continuación un primer ejemplo en el que este enfoque intuitivo se ve rebasado. Hasta ahora, el mayor número primo conocido es

$$\mathfrak{p} = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$$

que consta de 39 dígitos.

Si utilizamos el conocido procedimiento de Euclides, podemos establecer con facilidad, y enteramente de conformidad con el enfoque finitista que hemos adoptado, que entre $\mathfrak{p} + 1$ y $\mathfrak{p}\,! + 1$ existe un nuevo número primo.

Esta última afirmación es también acorde a nuestro punto de vista finitista, pues, la expresión "existe" no es aquí otra cosa que una abreviatura del siguiente enunciado:

$\mathfrak{p} + 1$ es primo, o $\mathfrak{p} + 2$ es primo,
o $\mathfrak{p} + 3$ es primo, o ... , o $\mathfrak{p}\,! + 1$ es primo.

Ahora bien, es evidente que esta afirmación resulta equivalente a: existe un número primo que es:

1. $> \mathfrak{p}$

y

2. $\leq \mathfrak{p}\,! + 1$.

A partir de esta formulación podemos pasar a una proposición que expresa únicamente una parte de la afirmación euclidiana, esto es,

$$\text{existe un número primo} > \mathfrak{p}\,.$$

Sin embargo, aunque desde el punto de vista concreto este enunciado afirma mucho menos que el anterior, y aunque el paso de la afirmación euclidiana a este enunciado parcial de la misma parezca tan inocuo, su afirmación independiente del contexto anterior significa un salto a la esfera de lo transfinito. ¿Cómo puede ser esto?

Lo que tenemos frente a nosotros es un enunciado existencial [de la forma] "existe". En la proposición euclidiana también aparecería una afirmación de esta índole. Pero aquí, la expresión "existe" no es otra cosa que una abreviatura de

$$\mathfrak{p}+1 \text{ es primo, o } \mathfrak{p}+2 \text{ es primo,}$$
$$\text{o } \mathfrak{p}+3 \text{ es primo, o} \ldots, \text{ o } \mathfrak{p}\,!+1 \text{ es primo.}$$

del mismo modo que decimos: entre estos trozos de gis existe uno que es rojo, en lugar de decir: este trozo de gis es rojo o ese trozo de gis es rojo o...o aquel trozo de gis es rojo. Un enunciado de este tipo, en el que se afirma que en una totalidad finita "existe" un objeto con una cierta propiedad, se encuentra en completa conformidad con la concepción general finitista que hemos aceptado.

La expresión

$$\mathfrak{p}+1 \text{ es primo, o } \mathfrak{p}+2 \text{ es primo, o } \mathfrak{p}+3 \text{ es primo, o} \ldots \textit{ ad inf.}$$

sería una especie de producto[3] lógico infinito. Pero al igual que ocurre en el análisis, una transición de este tipo de lo finito a lo infinito no puede aceptarse en general, esto es, sin una discusión especial previa —y, en este caso, sin una observación rigurosa de ciertas precauciones—; de otro modo carece, en principio, de sentido.

Podemos generalizar lo anterior diciendo que un enunciado existencial de la forma "existe un número con tales y cuales propiedades" únicamente tiene sentido como *enunciado parcial*, es decir, como parte de un enunciado determinado con mayor particularidad y cuyo contenido exacto carece, sin embargo, de importancia para muchas aplicaciones.

[3] Más bien disyunción. [N. de T.]

De esta manera, nos topamos con el transfinito al analizar un enunciado existencial que no puede interpretarse como una disyunción[4]. Obtenemos igualmente enunciados transfinitos cuando por ejemplo negamos una proposición universal, esto es, una proposición que se refiere a numerales indeterminados. Así, por ejemplo, desde el punto de vista finitista, el enunciado de que, para cualquier numeral $\mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a}$$

no es susceptible de negación.

Podemos explicarnos esta situación si tenemos presente que el enunciado no puede ser interpretado como una expresión compuesta de un número infinito de igualdades numéricas conectadas por la palabra "y", sino que debe serlo como juicio hipotético que afirma algo con tal de que dispongamos ya de un numeral.

Una consecuencia importante de esto es que, de acuerdo con la perspectiva finitista que estamos discutiendo, nos encontramos imposibilitados para utilizar el principio según el cual una ecuación como la anterior, en la que aparece un numeral no especificado es, o bien satisfecha por todos y cada uno de los numerales, o bien refutada por un contraejemplo. En efecto, esta alternativa descansa esencialmente, en tanto que aplicación del principio del tercero excluido, en la suposición de que la validez general de esa igualdad puede ser negada.

Podemos concluir entonces que cuando permanecemos, tal y como estamos obligados a hacerlo, en la esfera de los enunciados finitos, dependemos de relaciones lógicas poco claras, y esta ausencia de claridad se convierte en algo intolerable cuando el "todos" y el "existe" se combinan en enunciados subordinados. Como sea, las leyes lógicas utilizadas por el ser humano desde que éste tiene la capacidad de pensar y que Aristóteles nos ha enseñado no tienen aquí validez.

Así las cosas, podríamos proponernos como tarea inicial la determinación explícita de las leyes lógicas que son válidas para la esfera de las

---

[4] El texto alemán dice "Wir stoßen also hier auf das Transfinite durch Zerlegung einer existentialen Aussage, die sich nicht als eine Oder-Verknüpfung deuten läßt". En la versión de 1930 publicada en los *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert corrige la frase: "Wir stoßen also hier auf das Transfinite durch Zerlegung einer existentialen Aussage in Teile, deren keiner sich als nicht eine Oder-Verknüpfung deuten läßt". Es decir: "nos topamos con el transfinito al analizar un enunciado existencial, ninguna de cuyas partes puede interpretarse como una disyunción". [N. de T.]

proposiciones finitarias. Sin embargo, esto no bastaría, pues, en realidad, lo que no queremos es precisamente renunciar al uso de las sencillas leyes de la lógica aristotélica, y nadie, no importa que tan persuasivamente argumente, podrá impedir que los hombres continúen negando afirmaciones de todo tipo, haciendo juicios parciales y aplicando el principio del tercero excluido. Pero entonces ¿cuál debe ser nuestra actitud?

Recordemos, en primer lugar, que *somos matemáticos* y que, en cuanto tales, nos hemos encontrado ya, con frecuencia, en situaciones igualmente difíciles. Recordemos, además, que ha sido el genial método de los elementos ideales el que en tales circunstancias nos ha salvado. He mencionado ya, al comienzo de mi exposición, algunos ejemplos notables de su aplicación.

De manera exactamente análoga a como $i = \sqrt{-1}$ ha sido introducido con el objeto de mantener en su forma más sencilla posible las leyes del álgebra, por ejemplo, las relativas a la existencia y al número de raíces de una ecuación, así como introducimos factores ideales con el fin de preservar la sencillez de las leyes de la divisibilidad entre los números algebraicos (por ejemplo, hemos introducido un divisor común ideal para los números 2 y $1 + \sqrt{-5}$ al no existir uno real), tenemos ahora que *añadir a los enunciados finitos los enunciados ideales*, conservando de este modo las reglas de la lógica aristotélica en su simplicidad original.

En realidad, no deja de ser extraño que los principios deductivos que Kronecker ataca con tanta pasión sean precisamente la contraparte de lo que después él mismo, en la teoría de los números, encuentra tan admirable en la obra de Kummer, y que califica con tanto entusiasmo como el logro más elevado de la actividad matemática.

Pero ¿cómo podemos llegar a los *enunciados ideales*? Una indicación notable de la esencial corrección de nuestro procedimiento es el hecho de que la vía para llegar a esos enunciados consista simple y sencillamente en continuar de manera natural y consecuente el desarrollo seguido por la teoría de los fundamentos de las matemáticas.

Es fácil constatar que la matemática elemental va más allá de la perspectiva que adopta la teoría intuitiva de los números. Es decir, el método de calcular algebraicamente con letras no es, en la forma en la que hasta ahora lo hemos interpretado, algo que forme parte de la teoría concreta intuitiva de los números [inhaltlich-anschauliche Zahlentheorie]. En ésta, las fórmulas se utilizan siempre única y exclusivamente con fines de comunicación; las letras se refieren a numerales y una igualdad no expresa sino la identidad de dos signos.

Por el contrario, en el álgebra, consideramos a las expresiones formadas por letras como algo autónomo, al tiempo que los enunciados concretos de la teoría de los números son formalizados precisamente por esas expresiones.

Así, en lugar de enunciados acerca de numerales, tenemos fórmulas, presentándose éstas ahora como objetos concretos de nuestra intuición; y, en lugar de las demostraciones concretas de la teoría de los números [inhaltlich zahlentheoretische Beweise] tenemos ahora la derivación de una fórmula a partir de otra de acuerdo con ciertas reglas.

Lo que obtenemos entonces es, como lo muestra ya el álgebra, una multiplicación de los objetos finitos. Hasta ahora, estos objetos no eran otros que numerales como I, II, ..., IIIII. Estos signos eran, además, los únicos que habían sido objeto de una consideración concreta. Pero ya en el álgebra la praxis matemática va mucho más lejos de eso. Así, aun cuando un enunciado resulte permisible de acuerdo con nuestro enfoque finitista en conjunción con las indicaciones concretas, como, por ejemplo, la proposición

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} ,$$

donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son numerales específicos, la forma de comunicación que utilizaremos no será ésta, sino

$$a + b = b + a.$$

Esta fórmula no es ya la comunicación inmediata de un contenido [Inhalt], sino tan sólo una construcción formal cuya relación con los enunciados finitistas originales

$$2 + 3 = 3 + 2$$

$$5 + 7 = 7 + 5$$

consiste en que en la primera fórmula los numerales 2, 3, 5, 7 reemplazan a a y b, estableciéndose con ello, por medio de este sencillo procedimiento demostrativo, tales enunciados finitistas particulares.

De este modo, entonces, podemos concluir que ni a, ni b, ni =, ni +, ni siquiera la fórmula

$$a + b = b + a$$

poseen, por sí mismos, ningún significado, que ocurre con ellos a este respecto lo mismo que con los numerales. Sin embargo, a partir de esa fórmula es posible derivar otras fórmulas a las que sí podemos asignar un significado, considerándolas como comunicaciones de enunciados finitistas.

La generalización de esta idea nos lleva a una concepción de las matemáticas que considera a éstas como un inventario de fórmulas a las que corresponden, en primer lugar, expresiones concretas de enunciados finitistas y a las que se añaden, en segundo, otras fórmulas que carecen de todo significado y que constituyen *los objetos ideales de nuestra teoría.*

Recordemos ahora cuál era nuestro objetivo. Por una parte, encontramos en las matemáticas enunciados finitistas que no contienen sino numerales. Por ejemplo,

$$3 > 2\,, \quad 2 + 3 = 3 + 2\,, \quad 2 = 3\,, \quad 1 \neq 1\,.$$

De acuerdo con nuestro enfoque finitista, estos enunciados se presentan como algo inmediatamente intuitivo y comprensible, como algo susceptible de ser negado, que es verdadero o falso, y en relación a lo cual podemos hacer valer sin ninguna clase de restricciones las reglas de la lógica aristotélica. El principio de no contradicción —esto es, un enunciado y su negación no pueden ser a la vez verdaderos— y el del "tercero excluido" —es decir, o bien un enunciado es verdadero o lo es su negación— son aquí válidos. Así, si digo que este enunciado es falso, esto resulta equivalente a afirmar que su negación es verdadera.

Además de estos enunciados elementales absolutamente no problemáticos, encontramos enunciados finitistas que sí lo son, por ejemplo aquellos que no se pueden descomponer en enunciados más simples. Por último, hemos introducido también los enunciados ideales, cuya función consiste en preservar la validez de las leyes usuales de la lógica.

Ahoran bien, en tanto que no expresan afirmaciones finitistas, los enunciados ideales, esto es, las fórmulas, carecen de todo significado, por lo que no podemos aplicarles las operaciones lógicas de manera concreta [inhaltlich] como a los enunciados finitistas. Se hace entonces necesario someter a un proceso de formalización tanto a las operaciones lógicas como a las demostraciones mismas. Pero este proceso requiere, a su vez, de una reformulación de las relaciones lógicas en fórmulas. Por esta razón necesitamos, aparte de los signos matemáticos, signos lógicos, *v.gr.*

&	∨	→	–
y	o	implica	no

Además de variables matemáticas *a*, *b*, *c*, ... necesitamos de variables lógicas, esto es, de variables enunciativas *A*, *B*, *C*, ...

¿Cómo podemos lograr todo esto? En la historia de la ciencia es posible observar con frecuencia la existencia de una especie de armonía preestablecida a la que se debe una serie de desarrollos del conocimiento de gran importancia. Es precisamente esa armonía de la que Einstein, por ejemplo, saca provecho en su teoría de la gravitación al encontrar como algo dado en forma ya acabada el cálculo general de invariantes. Por fortuna, esa misma armonía se pone de manifiesto en relación a nuestra problemática, permitiéndonos hallar como algo ya elaborado de manera avanzada el *cálculo lógico.*

Es evidente, por lo demás, que este cálculo se crea originalmente en el marco de una perspectiva completamente diferente a la nuestra. De acuerdo con ese enfoque, los signos del cálculo lógico se introducen exclusivamente como un medio de comunicación. Resulta consecuente con el curso que hemos seguido despojar ahora a los signos lógicos, lo mismo que a los signos matemáticos de cualquier tipo de significado. Según esto, las fórmulas del cálculo lógico no poseen absolutamente ningún significado; todos ellos son ahora enunciados ideales.

En el cálculo lógico contamos con un lenguaje de signos [Zeichensprache] con la capacidad no sólo de dar cuenta en fórmulas de las proposiciones de las matemáticas, sino igualmente de expresar por medio de procesos formales las inferencias lógicas.

Procediendo de manera exactamente análoga al paso de la teoría concreta de los números al álgebra formal, consideraremos ahora a los signos y a los símbolos de operación del cálculo lógico como algo desprovisto de su significado concreto. En lugar de la ciencia matemática concreta [inhaltliche mathematische Wissenschaft], lo que en último término obtenemos con todo ello es un inventario de fórmulas que contienen signos tanto lógicos como matemáticos, y que se ordenan según reglas definidas. Algunas de estas fórmulas corresponden a los axiomas matemáticos, y ciertas reglas (de acuerdo con las cuales ciertas fórmulas siguen a otras) corresponden a la inferencia concreta. En otras palabras, la inferencia concreta es reemplazada por un manejo externo [äusseres Handeln][5] según reglas. Con ello se realiza de manera estricta el tránsito de un tratamiento intuitivo e ingenuo a uno formal.

Por una parte, esta transición se lleva a cabo con los axiomas mismos, considerados ingenuamente en su origen como verdades básicas y a los cuales la axiomática moderna concibe desde hace mucho como meras interrelaciones de conceptos. Por la otra, sin embargo, la transición tiene lugar también en relación al cálculo lógico, originalmente pensado como un simple lenguaje diferente.

Como ejemplo, bastará aclarar aquí brevemente la manera en la que ha de formalizarse la *demostración matemática.*

Llamaremos *axiomas* a ciertas fórmulas que sirven como punto de partida para la construcción del edificio formal de las matemáticas. Una demostración matemática es una figura que se presenta ante nosotros como algo intuitivo. Consiste de inferencias llevadas a cabo de acuerdo con el esquema

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$

en la que cada una de las premisas, esto es, de las fórmulas que corresponden a $\mathfrak{S}$ y a $\mathfrak{S}\rightarrow\mathfrak{T}$ es o bien un axioma o resulta de un axioma por sustitución o coincide con la fórmula final de una inferencia previa o resulta de una fórmula de ese tipo por sustitución. Una fórmula es demostrable si es la fórmula última de alguna demostración.

El programa que hemos enunciado prefigura ya la elección de los axiomas de nuestra teoría de la demostración. Y aunque hay algo de arbitrariedad en tal elección, es posible, como en la geometría, distinguir grupos particulares cualitativamente diversos, de los que ahora ofreceremos algunos ejemplos.

I. Axiomas de implicación

$$A\rightarrow(B\rightarrow A)$$

(introducción de una suposición)

---

[5] Esto es, un manejo formal. [N. de T.]

$$(B \to C) \to \{(A \to B) \to (A \to C)\}$$

(eliminación de un enunciado)

II. Axiomas de la negación

$$\{A \to (B \& \bar{B})\} \to \bar{A}$$

(principio de contradicción)

$$\bar{\bar{A}} \to A$$

(principio de la doble negación).

[Del principio de contradicción se sigue la fórmula $(A \& \bar{A}) \to B$; y del principio de la doble negación se sigue el principio del tercero excluido $\{(A \to B) \& (\bar{A} \to B)\} \to B$][6].

Los axiomas de los grupos I y II no son, en realidad, otros que los del cálculo de enunciados.

III. Axiomas de transfinitud

$$(a) A(a) \to A(b)$$

(inferencia de lo universal a lo particular; axioma de Aristóteles);

$$(\bar{a})\ A \to (Ea) \bar{A}(a)$$

(si un predicado no se aplica a todos los individuos, hay un contraejemplo);

$$(\bar{E} a) A \to (a) \bar{A}(a)$$

(si no hay un individuo al que un enunciado se aplique, entonces el enunciado es falso para toda *a*).

En relación a los principios del grupo de axiomas III se pone de manifiesto una situación por demás notable, a saber, que todos los axiomas transfinitos pueden obtenerse por derivación a partir de uno solo y que éste posee la característica de contener el núcleo fundamental

[6] El texto entre paréntesis cuadrados es un añadido de la tercera versión de 1930. [N. de T.]

del axioma matemático que más ha provocado controversias en nuestra disciplina, el axioma de elección:

$$A(a) \to (\varepsilon A),$$

donde ε es la función de elección transfinita.

A ellos se agregan los axiomas matemáticos especiales:

IV. Axiomas de la igualdad

$$a = a;$$

$$a = b \to (A(a) \to A(b)),$$

y también los

V. Axiomas numéricos

$$a + 1 \neq 0$$

y el axioma de inducción completa:

$$\{A(0) \,\&\, (x)(A(x) \to A(x'))\} \to A(a)$$ [7]

Con todos estos axiomas es posible desarrollar una teoría de la demostración que se ajuste a las exigencias que hemos delineado y erigir un sistema de las fórmulas demostrables, es decir, la ciencia matemática.

Pero en nuestro entusiasmo por el éxito que en general hemos obtenido y, en particular, por contar con una herramienta tan imprescindible como el cálculo lógico como algo ya dado, no debemos de ninguna manera perder de vista un requisito previo para nuestro proceder y esencial al mismo. Existe una condición única, aunque absolutamente necesaria, para la aplicación del método de los elementos ideales, a saber, *la prueba de consistencia.*

La extensión por medio de la adición de ideales es lícita y permisible solamente cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones en el dominio original, y, en consecuencia, únicamente si al suprimir los elementos ideales, las relaciones que resultan para los elementos originales son válidas en la esfera original.

---

[7] Esta fórmula no aparece en la edición de 1925. Hilbert la añade, sin embargo, en 1930. [N. de T.]

Es un hecho que en la actualidad estamos en grado de plantearnos y abordar este problema de la consistencia. Es evidente que éste se reduce a mostrar que con los axiomas y reglas admitidos es imposible obtener "$1 \neq 1$" como la fórmula final, es decir, que la fórmula "$1 \neq 1$" no es demostrable.

La dificultad a la que aquí nos enfrentamos se ubica fundamentalmente en la esfera de lo intuitivo, y ocurre con ella lo mismo que, digamos, en la teoría concreta de los números con el problema del carácter irracional de $\sqrt{2}$, esto es, con la demostración de que es imposible encontrar dos numerales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ que se encuentren en la relación $\mathfrak{a}^2 = 2\mathfrak{b}^2$; en otras palabras, que es imposible hallar dos números con una cierta propiedad. En correspondencia con ello, lo que nosotros tenemos que demostrar ahora es que no puede haber una demostración que exhiba ciertas características.

Al igual que un numeral, una demostración formalizada es un objeto concreto y susceptible de inspección, es algo que podemos comunicar por completo. Que una fórmula final tenga la característica en cuestión, esto es, que sea "$1 \neq 1$" constituye también una propiedad concreta y constatable de una demostración. Ahora bien, la prueba de su imposibilidad es algo que realmente podemos llevar a cabo y que justifica la introducción que hemos hecho de enunciados ideales.

Al mismo tiempo, lo anterior nos ofrece la grata sorpresa de constituir también la solución de un problema que se había convertido desde hace tiempo en algo verdaderamente perentorio, el de la demostración de *la consistencia de los axiomas de la aritmética*.

La aplicación del método axiomático plantea de manera natural la cuestión de la consistencia. La elección, la interpretación y el manejo de los axiomas no pueden estar basadas simplemente en la buena fe y en lo que nuestras creencias nos indiquen. Tanto en la geometría como en la física es posible dar pruebas de consistencia relativa, esto es, de reducir el problema de la consistencia en esas esferas a la consistencia de los axiomas de la aritmética. Pero es evidente que no tiene sentido buscar una demostración de ese tipo para la aritmética misma.

En la medida en la que nuestra teoría de la demostración, basada en el método de los elementos ideales, hace posible este último y decisivo paso, constituye una especie de punto final y necesario en la construcción del edificio de la teoría axiomática. Y lo que ya hemos tenido que padecer en dos ocasiones, primero con las paradojas del cálculo infinitesimal y luego con las paradojas de la teoría de conjuntos no podrá pasarnos una tercera vez, no volverá a pasar nunca.

Podemos decir, entonces, que la teoría de la demostración, cuyos rasgos principales acabamos de bosquejar, no sólo se encuentra en condiciones de dar una base firme y segura a las matemáticas, sino que abre también una vía novedosa para abordar los problemas generales de carácter fundamental que caen dentro del dominio de nuestra disciplina y a los que antes no podíamos abocarnos.

Las matemáticas se convierten así en una especie de tribunal superior, esto es, en un tribunal de suprema instancia para la evaluación y resolución de cuestiones de principio, siempre sobre una base concreta en relación a la cual es no sólo posible un consenso, sino al mismo tiempo un control de cada afirmación.

En mi opinión, inclusive los planteamientos del "intuicionismo", no importa qué tan modestos sean, pueden adquirir su justificación únicamente ante este tribunal.

A manera de ejemplo del tratamiento de este tipo de cuestiones fundamentales, consideremos la tesis de que todo problema en las matemáticas posee una solución. Esta suposición es compartida por todos los matemáticos. De hecho, una parte muy importante del atractivo que puede tener para nosotros la ocupación con un problema en las matemáticas reside precisamente en que de alguna manera escuchamos una especie de llamado: "Allí tienes el problema. ¡Busca la solución! Puedes hallarla con la sola ayuda del pensamiento; ¡en las matemáticas no hay *ignorabimus*"[8]!

Ciertamente, la teoría de la demostración no puede proporcionar un método general para resolver todos los problemas matemáticos. No existe algo de este tipo. Sin embargo, lo que sí cae dentro del campo de acción de nuestra teoría es la prueba misma de la consistencia de la suposición del carácter resoluble de todo problema matemático.

Pero me gustaría argumentar todavía como sigue. La prueba definitiva para la evaluación de cualquier teoría nueva la constituye su capacidad para

---

[8] Hilbert se refiere aquí a la posición de Emil duBois-Reymond acerca de la limitación esencial de la razón humana en el conocimiento de la naturaleza y, particularmente, a su imposibilidad para resolver ciertos problemas (materia, fuerza, origen del movimiento, conciencia, etc.). DuBois-Reymond resumía sus ideas en la afirmación *Ignoramus et ignorabimus* (ignoramos e ignoraremos). [N. de T.]

resolver problemas planteados antes de que ella existiera, problemas cuya solución no formaba parte de las razones específicas para crearla. "Por sus frutos los conoceréis" es también un principio válido para las teorías. Así, inmediatamente después de que Cantor descubre los primeros números transfinitos, esto es, los números de la segunda clase, se plantea el problema de determinar si realmente es posible contar con tales números conjuntos ya conocidos y que en un sentido normal no son numerables.

Uno de estos conjuntos es evidentemente el de los puntos de la recta. La cuestión de si los números de la tabla que hemos formulado anteriormente bastan para contar los puntos de la recta, es decir, los números reales, constituye el célebre problema del continuo, que Cantor mismo plantea, pero no resuelve. Al principio, algunos matemáticos creyeron poder desembarazarse de este problema simplemente negando su existencia. Los puntos que a continuación señalamos muestran claramente lo equivocado de tal actitud.

El problema que el continuo plantea se caracteriza por su originalidad y su belleza interna. Pero, además, posee en relación a otros problemas también célebres en las matemáticas dos rasgos distintivos y preeminentes. Por una parte, su solución requiere de vías alternativas y novedosas, puesto que los métodos conocidos fallan en este caso; por la otra, su solución resulta por sí misma de mayor interés en vista del resultado a obtener.

La solución del problema del continuo es algo que puede realizarse con la teoría que hemos desarrollado. De hecho, la prueba de que todo problema matemático tiene una solución representa precisamente el primer paso de importancia en esa dirección.

La respuesta al problema del continuo es afirmativa, esto es, los puntos de una recta pueden ser contados por medio de números de la segunda clase. O para decirlo en forma popular, que un simple conteo que se extiende más allá del infinito numerable [ein blosses Hinüberzählen über das abzählbare unendlich] basta para agotar los puntos de la recta. Llamaremos a esta afirmación el teorema del continuo. Lo que sigue es una breve exposición de las ideas básicas de una demostración del mismo.

En lugar del conjunto de los números reales consideraremos algo que es evidentemente equivalente, el conjunto de las funciones numéricas, esto es, el de las funciones cuyos argumentos y valores son siempre números enteros.

Si queremos ordenar el conjunto de estas funciones en el sentido requerido por el problema del continuo, es necesario hacer referencia al proceso de generación de una función individual. Sin embargo, una función de un solo argumento puede estar definida de tal manera que los valores que tome para algunos argumentos, o para todos ellos, dependa en cada caso de la solución de algún problema matemático bien definido, por ejemplo, de la solución de ciertos problemas diofantinos o de la existencia de números primos con determinadas características, o de la cuestión de si un número dado (digamos $2^{\sqrt{2}}$) es irracional.

Precisamente para evitar esta dificultad podemos recurrir a la afirmación mencionada con anterioridad acerca de la solubilidad de cualquier problema matemático bien definido. En realidad, esta afirmación no es otra cosa que un lema general que se ubica en un ámbito al que podemos llamar *metamatemática*, es decir, en la esfera de la teoría concreta de las demostraciones formalizadas [inhaltliche Theorie der formalisierten Beweise]. Podemos formular como sigue la parte de ese lema que resulta de importancia para nosotros.

LEMA I. Supongamos que tenemos una versión formalizada de una demostración que contradice el teorema del continuo y que esa formalización ha sido llevada a cabo por medio de funciones que requieren para su definición del signo transfinito ε (grupo III de axiomas). Resulta entonces posible sustituir esas funciones por otras, definidas exclusivamente por recursión ordinaria y transfinita y sin apelar al signo ε, de tal manera que lo transfinito sólo aparece en la forma del cuantificador universal, ( ) .

El desarrollo cabal de la teoría de la demostración requiere, sin embargo, de ciertas estipulaciones de las que ahora nos ocuparemos.

Para los *enunciados variables* [variable Aussagen] (fórmulas indeterminadas) utilizaremos siempre letras latinas mayúsculas, mientras que para los *enunciados constantes* [individuelle Aussagen] (fórmulas específicas), nos serviremos de letras griegas mayúsculas. Así, por ejemplo,

$$\mathsf{Z}(a) : \text{“}a \text{ es un número entero ordinario”;}$$

$$\mathsf{N}(a) : \text{“}a \text{ es un número de la segunda clase”.}$$

Para las *variables matemáticas* se utilizarán siempre letras latinas minúsculas, mientras que para los *objetos matemáticos constantes* (funciones específicas) recurriremos a las letras griegas minúsculas.

En relación al procedimiento de *sustitución* serán válidas las siguientes convenciones generales.

Las variables enunciativas [Aussagenvariable] deben ser sustituidas únicamente por otros enunciados (fórmulas) indeterminados o constantes.

Una variable matemática puede ser sustituida por una figura [Figur] cualquiera. Sin embargo, cuando una variable matemática aparece en una fórmula, el enunciado constante que caracteriza su tipo debe aparecer antes del signo de implicación. Por ejemplo,

$$\mathsf{Z}(a) \to (\ldots a \ldots)\,,$$

$$\mathsf{N}(a) \to (\ldots a \ldots)\,.$$

Nuestra convención tiene el efecto de que, por ejemplo, en lugar de a en $\mathsf{Z}(a)$ o en $\mathsf{N}(a)$ únicamente sean permisibles las sustituciones de esta variable por números ordinarios o por números de la segunda clase, respectivamente.

Las letras góticas mayúsculas y minúsculas son siempre *indicadores* [Hinweise] y se utilizan exclusivamente para comunicar información.

Es necesario dejar en claro que por "figura" estamos entendiendo aquí un objeto compuesto a partir de signos primitivos y que se presenta ante nosotros como algo intuitivo.

Para tener una idea completa de la línea que sigue la demostración del teorema del continuo es indispensable ante todo una comprensión precisa del concepto de variable matemática en su acepción más general.

Las variables matemáticas son de dos clases:

(1) las *variables primitivas* [Grundvariablen],
(2) los *tipos variables* [Variablentypen].

(1) Mientras que en la aritmética y el análisis en su totalidad es suficiente contar con los números enteros ordinarios como únicas variables primitivas, tenemos ahora que a cada una de las clases numéricas transfinitas de Cantor le corresponde una *variable primitiva* que puede adoptar la forma de números ordinales de esa clase. En consecuencia, a cada una de esas variables se encuentra asociado un enunciado que la caracteriza. Este enunciado se encuentra a su vez caracterizado de manera implícita por los axiomas. Por ejemplo,

$$\mathsf{Z}(0)\,,$$

$$\mathsf{Z}(a) \to \mathsf{Z}(a+1)\,,$$

$$\{\, A(0) \;\&\; (a)\,(A(a) \to A(a+1))\,\} \to \{\, \mathsf{Z}(a) \to A(a)\,\}$$

(fórmula de la inducción normal)

$$\mathsf{N}(0),$$
$$\mathsf{N}(a) \to \mathsf{N}(a+1),$$
$$(n)\ \{\ \mathsf{Z}(n) \to \mathsf{N}(a)\ \} \to \mathsf{N}\lim a(n);$$

y además la fórmula de la inducción transfinita para los números de la segunda clase.

A cada clase de variables primitivas corresponde un tipo específico de recursión. Por medio de ésta pueden definirse funciones cuyos argumentos son precisamente las variables primitivas de esa clase. La recursión asociada a las variables numéricas no es otra que la "recursión ordinaria". Por medio de ella, una función de una variable numérica n se encuentra definida cuando se da su valor para $n = 0$ y se especifica cómo puede obtenerse el valor de la función para $n + 1$ a partir del valor para n. La generalización de la recursión usual es la recursión transfinita, cuyo principio general consiste en la determinación del valor de la función para un valor de la variable recurriendo a los valores anteriores de esa misma función.

(2) A partir de las variables primitivas obtenemos por aplicación de las operaciones lógicas a los enunciados asociados con esas variables otros tipos variable, *v.gr.* Z y N. Las variables definidas de esta manera se llaman *tipos variable*, mientras que los enunciados así definidos reciben el nombre de *enunciados tipo* [Typenaussagen]. Para estos últimos se introducen cada vez nuevos signos constantes. La fórmula

$$(a)\ \{\mathsf{Z}(a) \to \mathsf{Z}(f(a))\ \}$$

constituye el ejemplo más sencillo de un tipo variable. Es decir, esta fórmula define la variable funcional f y, en tanto que enunciado tipo, es denotada por $\Phi(f)$, "ser una función".

Otro ejemplo nos lo ofrece la fórmula

$$(f)\ \{\ \Phi(f) \to \mathsf{Z}g(f)\ \};$$

Esta expresión define la propiedad de "ser una función de función", $\Psi(g)$, en la que el argumento g representa la nueva variable de función de función[9].

[9] "Función de función" se refiere a una "funcional" y no a una "composición de funciones". [N. de T.]

Para la caracterización de los tipos variables superiores es necesario proveer de índices a los enunciados tipo. Un enunciado tipo que consta ya de un índice se define recursivamente, de tal modo que en su definición aparezca ahora en lugar de la igualdad (=) la equivalencia lógica (~).

Tanto en la aritmética como en el análisis, las únicas variables superiores que se utilizan, en interacción finita son: las funciones, las funciones de función, etc.

Un tipo variable que va más allá de estos sencillos ejemplos nos lo ofrece la variable g que asocia un valor numérico $g(f_n)$ a cualquier sucesión f_n que consista de

una función f_1 de un número entero: $\Phi(f_1)$;

una función de función f_2 : $\Psi(f_2)$;

una función f_3 de una función de función;

etc.

Podemos representar el enunciado tipo correspondiente, $\Phi_\omega(g)$, por medio de las siguientes equivalencias:

$$\Phi_0(a) \sim Z(a),$$

$$\Phi_{n+1}(f) \sim (b)\{\Phi_n(b) \rightarrow Z(f(b))\},$$

$$\Phi_\omega(g) \sim \{(n)\Phi_n(f_n) \rightarrow Z(g(f))\};$$

que constituyen igualmente un ejemplo de la definición recursiva de un enunciado tipo.

Los tipos variable pueden clasificarse de acuerdo con su *nivel* [Höhe][10]. En el nivel 0 se encuentran todas las constantes numéricas; en el nivel 1, todas las funciones cuyos argumentos y valores poseen en su totalidad la propiedad de una variable primitiva, por ejemplo, la propiedad Z o la propiedad N. Una función cuyo argumento y cuyo valor poseen un nivel determinado es de un nivel superior en 1 que el del mayor de esos dos niveles de su argumento y su valor. Una sucesión de funciones de distintos niveles tiene como nivel el límite de esos niveles.

Una vez realizados estos preparativos podemos retomar nuestro problema original. Recordemos que para la prueba del teorema del

[10] La traducción literal de la palabra *Höhe* es "altura". Utilizamos la palabra "nivel" por considerarla más adecuada. [N. de T.]

continuo resulta esencial establecer una correspondencia biunívoca entre las definiciones de las funciones numéricas en las que no aparece el símbolo ε y los números cantorianos de la segunda clase, o bien establecer una correspondencia de tal modo que toda función de ese tipo resulte asociada al menos a un número de la segunda clase.

Es evidente que los mecanismos elementales para la construcción de funciones son, por una parte, la *sustitución* (es decir, el reemplazo de un argumento por una nueva variable o una nueva función) y la *recursión* (según el esquema de derivar el valor de la función para $n + 1$ a partir de su valor para n).

Podría pensarse que a estos dos procedimientos, sustitución y recursión, deberían agregarse otros métodos elementales de definición, por ejemplo, la definición de una función explicitando sus valores hasta un cierto punto, a partir del cual la función es constante; también la definición por medio de procesos elementales obtenidos a partir de las operaciones aritméticas como el residuo en la división, la del máximo común divisor de dos números, y la definición de un número como el menor entre una cierta totalidad finita de números dados.

Sin embargo, todas esas definiciones pueden representarse como casos particulares de las operaciones de sustitución y recursión. En realidad, el método de buscar las recursiones requeridas equivale, en lo esencial, a una argumentación que establece el carácter finitista del procedimiento de definición de que se trate.

Es importante ahora tener una visión de conjunto de los resultados de que esas dos operaciones nos proveen. En relación a las recursiones que pueden utilizarse, la existencia de diversas posibilidades en el paso de n a $n+1$, impide una formulación unitaria, si es que hemos de limitarnos a la operación con variables numéricas ordinarias. Un ejemplo bastará para reconocer esta dificultad.

Consideremos las funciones

$$a + b\,;$$

a partir de ellas se obtiene por iteración (n veces)

$$a + a + \ldots + a = a \cdot n\,.$$

Asimismo, podemos pasar de $a \cdot b$ a

$$a \cdot a \cdot \ldots a = a^n$$

y de a^b a

$$a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \ldots .$$

De este modo, obtenemos en sucesión las funciones

$$a + b = \varphi_1(a, b),$$

$$a \cdot b = \varphi_2(a, b),$$

$$a^b = \varphi_3(a, b).$$

$\varphi_4(a, b)$ sería el b-ésimo término en la sucesión

$$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \ldots .$$

De manera exactamente análoga, podemos llegar luego a $\varphi_5(a, b), \varphi_6(a, b)$, etc.

Ciertamente podríamos ahora definir por sustituciones y recursiones $\varphi_n(a, b)$ para n variables, pero esas recursiones no se obtendrían de recursiones ordinarias sucesivas, sino que más bien nos veríamos conducidos a una recursión múltiple para varias variables tomadas simultáneamente. La resolución de esta recursión en sucesiones recursivas ordinarias no se logra sino cuando utilizamos el concepto de variables funcionales. La función $\varphi_a(a, a)$ sería un ejemplo de una función de la variable numérica a que no puede ser definida solamente por sustituciones y recursiones ordinarias sucesivas, si es que sólo aceptamos variables numéricas[11].

Las fórmulas

$$\iota(f, a, 1) = a,$$

$$\iota(f, a, n+1) = f(a, \iota(f, a, n));$$

$$\varphi_1(a, b) = a + b,$$

$$\varphi_{n+1}(a, b) = \iota(\varphi_n, a, b),$$

[11] La demostración de esta afirmación se debe a W. Ackermann.

en las que ι es una función específica de tres argumentos, de los cuales el primero es una función de dos variables numéricas ordinarias, muestran la manera en la que podemos definir la función $\varphi_n(a, b)$ utilizando variables funcionales.

Un ejemplo de una recursión más complicada es el siguiente:

$$\varphi_0(a) = \mathfrak{a}(a)$$

$$\varphi_{n+1}(a) = \mathfrak{f}(a, n, \varphi_n(\varphi_n(n+a))),$$

donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{f}$ representan expresiones conocidas de uno y tres argumentos respectivamente. Lo peculiar de esta recursión consiste en que en ella el valor numérico de $n + 1$ no se deriva del valor correspondiente para n, sino que la determinación de φ_{n+1} requiere que se conozca el curso [Verlauf] de la función φ_n.

Todas las dificultades que estos ejemplos nos plantean pueden ser superadas si recurrimos a los tipos variable. El esquema general de recursión se encuentra caracterizado de la siguiente manera

$$\rho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, 0) = \mathfrak{a},$$

$$\rho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, n+1) = \mathfrak{g}(\rho(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, n), n),$$

donde $\mathfrak{a}$ es una expresión dada de un tipo variable arbitario; $\mathfrak{g}$ es también una expresión dada de dos argumentos, de los cuales el primero es del mismo tipo variable que $\mathfrak{a}$, mientras que el segundo es un número. $\mathfrak{g}$ debe, además, satisfacer la condición de que su valor sea del mismo tipo variable que $\mathfrak{a}$. Por último, ρ es la expresión definida por la recursión, depende de tres argumentos y tiene el mismo tipo variable que $\mathfrak{a}$, una vez que se han llevado a cabo las sustituciones correspondientes para $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ y n. Aparte de esto, en $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}$ y, en consecuencia, también en ρ pueden aparecer parámetros arbitrarios.

A partir de este esquema general y por sustitución obtenemos recursiones definidas. Así *v.gr.* podemos obtener las recursiones de nuestros ejemplos, considerando a f y a a en el primer caso como parámetros, y representando, en el segundo, el paso de $\varphi_n(a)$ a $\varphi_{n+1}(a)$ como un paso mediado por la función de función $\mathfrak{g}$ de una función φ_n a otra φ_{n+1}, de tal manera que a no se considere nunca un parámetro en la recursión.

Comparada con la recursión elemental, la recursión que hemos utilizado en nuestros dos ejemplos tiene una mayor extensión, pues en un caso hemos introducido un parámetro superior que no es un número entero ordinario, mientras que en el otro hemos elegido para $\mathfrak{a}$ una función y para $\mathfrak{g}$ una función de funciones.

Los tipos variable constituyen un enlace que hace posible establecer una correspondencia entre las funciones de una variable numérica y los números de la segunda clase. De hecho, llegamos a una correspondencia así entre los números de la segunda clase y ciertos tipos de variables cuando comparamos los dos procesos de generación de los números de la segunda clase, esto es, el proceso de añadir una unidad y el del límite de una sucesión numerable, con el modo que incrementan los tipos variable su nivel. Establezcamos una correspondencia entre el proceso de añadir una unidad y el de tomar una función [Funktionen-Nehmen], es decir, la formación de una función que tiene como argumento a un tipo variable dado y la formación de un nuevo tipo variable mediante la unión de una sucesión numerable de tipos variable. Y designemos ahora como *tipos Z* a aquellos tipos variable que correspondan a los números de la segunda clase.

Tenemos así que, además de las operaciones lógicas, en la construcción de los tipos Z se utilizan únicamente las recursiones ordinarias (no transfinitas), precisamente aquellas que resultan necesarias para enumerar una sucesión de tipo como paso preparatorio para el proceso del límite. Una vez que hemos ordenado estos tipos Z de acuerdo con su nivel, tenemos una correspondencia biunívoca en la cual a cada número de la segunda clase, se le asocian los tipos variable de un nivel determinado.

Pero con ello habremos llegado también a una correspondencia biunívoca entre las funciones definidas por medio de los tipos Z y los números de la segunda clase. Para percatarse de esto bastará considerar la siguiente argumentación. Si establecemos los tipos variable únicamente hasta un cierto nivel, construyendo luego las funciones exclusivamente por medio de sustitución y recursión, lo que obtenemos es siempre una totalidad numerable de funciones. Podemos también formalizar de manera estricta esa enumeración. En particular, podemos hacer esto generando, en primer lugar, una función recursiva ρ que abarque todas las recursiones en cuestión y que, en consecuencia, contenga un parámetro que sea mayor que los tipos variable admitidos hasta ese momento. La definición de ρ es una aplicación del esquema general de recursión, de modo tal que el uso de un tipo de variable superior se convierte en algo esencial.

Lo que entonces hacemos es ordenar de acuerdo con su nivel las especializaciones importantes de los tipos variable que aparecen en ρ, con lo que obtenemos las diferentes sustituciones iniciales. Si colocamos luego a éstas en una sucesión numerable y tomamos como principio de ordenación el número de las sustituciones a realizar, obtendremos finalmente las funciones que queríamos definir.

El esquema de prueba que hemos presentado supone esencialmente la teoría de los números de la segunda clase. Los números de esta clase han sido introducidos simplemente como resultado del proceso continuado de contar más allá del infinito numerable, y hemos caracterizado luego el enunciado constante N, "ser número de la segunda clase" por medio de axiomas.

Sin embargo, esos axiomas proporcionan tan sólo el marco general para una teoría. Una fundamentación más precisa de la misma requiere de una investigación del modo en el que debe formalizarse el proceso continuado de contar más allá del infinito numerable. Esto se logra aplicando ese proceso a una sucesión. La sucesión misma no puede darse sino por medio de una recursión ordinaria y para ésta nuevamente son necesarios ciertos tipos.

Aunque esta situación parece presentar una dificultad importante, en realidad resulta que precisamente gracias a una argumentación de esta índole puede obtenerse de manera mucho más restringida la correspondencia entre los números de la segunda clase y las funciones de una variable numérica.

Los tipos variable que necesitamos para la construcción de los números de la segunda clase pueden obtenerse sustituyendo formalmente en uno o varios lugares de los enunciados de tipo definitorios que tenemos hasta ese momento el signo Z por el signo N. Los tipos variables que resultan de ello se llaman *tipos* N. Es evidente que los tipos Z y los tipos N correspondientes son siempre del mismo nivel.

Por lo demás, no es necesario asignar a un número dado de la segunda clase la totalidad de las funciónes del mismo nivel, sino que ahora es posible establecer una correspondencia recíproca entre los números de la segunda clase y las funciones, de acuerdo con el nivel de los tipos variable necesarios para su definición. En detalle, tal correspondencia se podría caracterizar como sigue.

Si en los tipos Z llegamos únicamente hasta un cierto nivel, el nivel de los tipos N correspondientes se ve también restringido. A partir de los números de la segunda clase construidos con estos tipos podemos obtener, por medio de una sucesión creciente, un número mayor de la segunda clase definido con ayuda de un tipo variable de mayor nivel.

Por otra parte, si tenemos tipos N de hasta un cierto nivel, entonces también las funciones definibles por medio de los tipos Z correspondientes pueden ser enumeradas, a saber, según el número de las sustituciones, tal y como lo hemos descrito anteriormente. Como es bien sabido, con una enumeración $\varphi(a, n)$ de este tipo, podemos llegar, utilizando el método de diagonalización cantoriano, por ejemplo, construyendo $\varphi(a, a) + 1$, a una función distinta a todas las funciones enumeradas y que no puede, en consecuencia, ser definida por medio de los tipos variable anteriormente aceptados.

Con todo ello habríamos hecho posible el establecimiento de una correspondencia biunívoca entre aquellas funciones definibles en el mismo nivel (y cuya totalidad es numerable) y los números de la segunda clase definibles en el nivel correspondiente, pero no en un nivel anterior. De esta manera, toda función resulta asociada con al menos un número de la segunda clase.

Sin embargo, la demostración del teorema del continuo no termina allí, pues requiere de una complementación esencial. Un examen del curso que ha seguido nuestra investigación hace ver que para construir la correspondencia buscada ha sido necesario hacer ciertas suposiciones; éstas tienen un efecto restrictivo en un sentido doble. Por una parte, porque nuestro esquema general de recursión para ρ únicamente representa el caso de la recursión ordinaria, en la que la variable según la cual la recursión avanza es la variable numérica. Por la otra, porque hemos restringido los tipos variable a aquellos que se obtienen por medio del proceso continuado de contar más allá de las sucesiones numeradas.

Es un hecho que las recursiones transfinitas y, en consecuencia, los tipos variable de nivel superior, resultan imprescindibles en la investigación matemática, por ejemplo, para la construcción de funciones de variable real con ciertas propiedades. Pero en relación al problema que nos ocupa, esto es, cuando se trata de construir funciones de una variable numérica, en realidad no necesitamos esas recursiones superiores, ni de los tipos variable de esa especie. Podemos más bien recurrir al siguiente lema.

LEMA II. Para la obtención de funciones de una variable numérica las recursiones transfinitas resultan dispensables. Es decir, la recursión ordinaria, que opera y avanza según una variable numérica, basta no sólo para el proceso de construcción real de las funciones, sino que al mismo tiempo las sustituciones requieren únicamente de tipos variable para cuya definición es suficiente la recursión ordinaria.

Expresado de manera más precisa y acorde a nuestro enfoque finitista, el lema diría lo siguiente. Si para la construcción de una función que tiene como único argumento una variable numérica ordinaria se utiliza una recursión superior o un tipo variable correspondiente, entonces podemos definir siempre a esa función por medio de recursiones ordinarias y utilizando exclusivamente tipos Z.

El siguiente ejemplo podrá aclararnos el sentido y el alcance de nuestro lema.

Supongamos que se ha formalizado la correspondencia de las funciones de un argumento numérico y los números de la segunda clase. Con ello tendríamos también una cierta función $\zeta(a, n)$ que asigna un número ordinario al par formado por un número arbitrario a de la segunda clase numérica y el número ordinario n; $\zeta(a, n)$, con a fija y n variable, representa precisamente la función asociada a a. Sustituyamos ahora a por un número de la segunda clase numérica α_n que depende de n, y consideremos que la sucesión ha sido definida por recursión ordinaria o transfinita, por ejemplo,

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}.$$

Entonces $\zeta(\alpha_n, n)$ es una función de una variable numérica n y nuestro lema II afirmaría que esa función también puede definirse por recursión ordinaria por medio de tipos Z, mientras que una definición de $\zeta(a, n)$ por esos medios es imposible, puesto que la suposición de lo contrario conduce a una contradicción.

Es importante subrayar nuevamente que la exposición que acabamos de presentar no contiene más que las ideas básicas de una demostración del teorema del continuo. La realización completa de las ideas básicas, además de la demostración de los dos lemas, requiere de ciertas reformulaciones cuidadosas en el sentido de las exigencias finitistas.

Intentemos, por último, extraer algunas consecuencias globales de nuestras reflexiones en relación a nuestro problema inicial del infinito.

El infinito no tiene ningún tipo de realidad, no existe en la naturaleza ni es aceptable como fundamento de nuestro pensamiento intelectivo [verstandesmässig]. Es decir, en relación al infinito se da una notable y armónica coincidencia entre el ser y el pensar.

En abierta oposición a los intentos de Frege y Dedekind, podemos concluir que existen ciertas representaciones e ideas intuitivas que resultan imprescindibles como condición de posibilidad de todo conocimiento científico: la lógica no basta. Las operaciones con el infinito necesitan para ser seguras de una base finita.

El papel que resta al infinito es el de una idea, según la concepción kantiana de ésta, como un concepto de la razón que supera toda experiencia y por medio del cual se complementa lo concreto en el sentido de una totalidad. Pero a la vez, el infinito es una idea en la que podemos confiar sin reservas en el marco de la teoría que acabo de delinear.

Para finalizar, quiero dejar constancia aquí de mi sincero agradecimiento a Paul Bernays por su comprensiva colaboración y por su inestimable ayuda, en particular en lo relativo a la demostración del teorema del continuo.