

Acerca del concepto de número

Cuando estudiamos y comparamos los numerosos trabajos publicados acerca de los principios de la aritmética y los axiomas de la geometría, nos percatamos no sólo de la existencia de múltiples analogías y conexiones entre estas dos materias, sino asimismo de una importante diferencia en lo que se refiere al método de investigación en ellas.

Recordemos, en primer lugar, el modo en el que se introduce el concepto de número.

Tomando como punto de partida el concepto de número 1, se piensa normalmente que los demás números enteros positivos 2, 3, 4, ... , así como las leyes que rigen sus operaciones, surgen gracias al proceso de contar. Se pasa después, debido a la exigencia de generalidad de la sustracción, al número negativo. Luego puede definirse el número fraccionario, por ejemplo, como un par de números — se tiene entonces que toda función lineal posee una raíz— y finalmente a un número real como una cortadura o como una sucesión fundamental. De este modo se logra ver que cualquier función racional indefinida y, en general, cualquier función continua indefinida, tiene una raíz. Llamaremos *genético* a este método de introducción del concepto de número porque introduce el concepto mucho más general de número real por medio de extensiones sucesivas del concepto más sencillo de número.

En el caso de la construcción de la geometría, el procedimiento es fundamentalmente distinto. Lo común en ella es comenzar con la suposición de la existencia de una totalidad de elementos. Es decir, suponemos desde un inicio la existencia de tres sistemas de objetos: los puntos, las rectas y los planos. Relacionamos luego esos elementos entre

sí, según el modelo euclidiano, por medio de los axiomas de conexión, de orden, de congruencia y de continuidad¹.

El problema que entonces se nos plantea es el de demostrar la consistencia y completud de estos axiomas. En otras palabras, tenemos que probar que la aplicación de esos axiomas no puede nunca conducirnos a contradicciones y, además, que el sistema de los axiomas resulta suficiente para demostrar todos los teoremas de la geometría. Llamaremos *método axiomático* a este procedimiento de investigación.

La cuestión que ahora queremos plantear es la de saber si realmente el método genético resulta el más adecuado para el estudio del concepto de número, mientras que el método axiomático es el más idóneo para los fundamentos de la geometría. Igualmente resulta de gran interés comparar ambos procedimientos e investigar cuál es el más apropiado para una investigación lógica de los fundamentos de la mecánica o de alguna otra disciplina física.

Mi opinión es esta: *a pesar del gran valor pedagógico y heurístico que el método genético pueda tener, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento.*

En la teoría de los números, el método axiomático adquiere la siguiente forma.

Pensemos en un cierto sistema de objetos a los que llamaremos números y que denotaremos con las letras $a, b, c, \dots$. Supongamos, además, que estos números se encuentran en ciertas relaciones recíprocas cuya descripción precisa es expresada por los siguientes axiomas:

I. AXIOMAS DE CONEXION

I. 1 A partir de dos números a y b podemos obtener por "adición" otro número c . Simbólicamente,

$$a + b = c \quad \text{o bien} \quad c = a + b$$

I. 2 Dados dos números a y b cualesquiera, existe un único número x y existe un único número y tales que

$$a + x = b \quad \text{y} \quad y + a = b$$

¹ Cfr. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* [Fundamentos de la Geometría], Leipzig, 1899.

I. 3 Existe un número definido 0 con la propiedad de que, para todo número a ,

$$a + 0 = a \text{ y } 0 + a = a$$

I. 4 Dados dos números a y b cualesquiera, podemos obtener por "multiplicación" otro número c . En símbolos

$$a b = c \text{ o bien } c = a b.$$

I. 5 Si a y b son números y a es distinto de 0, existen un único número x y un único número y tales que

$$a x = b \text{ y } y a = b$$

I. 6 Existe un número definido 1 con la propiedad de que, para todo número a ,

$$a \cdot 1 = a \text{ y } 1 \cdot a = a.$$

II. AXIOMAS PARA LAS OPERACIONES

Las siguientes fórmulas son válidas para cualesquiera números a , b y c

$$\text{II. 1 } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\text{II. 2 } a + b = b + a$$

$$\text{II. 3 } a (b c) = (a b) c$$

$$\text{II. 4 } a (b + c) = a b + a c$$

$$\text{II. 5 } (a + b) c = a c + b c$$

$$\text{II. 6 } a b = b a$$

III. AXIOMAS DEL ORDEN

III.1 Si a y b son dos números distintos cualesquiera, uno de ellos (por ejemplo, a) es mayor ($>$) que el otro; este último es menor que el primero. En símbolos

$$a > b \text{ y } b < a$$

$$\text{III. 2 Si } a > b \text{ y } b > c, \text{ entonces } a > c$$

$$\text{III. 3 Si } a > b, \text{ entonces } a + c > b + c \text{ y } c + a > c + b$$

$$\text{III. 4 Si } a > b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } a c > c b \text{ y } c a > c b.$$

IV. AXIOMAS DE CONTINUIDAD

IV. 1 (Axioma de Arquímedes) Sean a y b dos números cualesquiera, $a > 0$ y $b > 0$. Sumando a consecutivamente, puede obtenerse una suma con la propiedad de que

$$a + a + \dots + a > b$$

IV. 2 (Axioma de completud) Si al sistema de los números se añade otro sistema de objetos, entonces en el nuevo sistema no pueden ser válidos los axiomas I, II, III, y IV. 1. En otras palabras, los números conforman un sistema de objetos que tiene la propiedad de hacer imposible una extensión [propia] del mismo conservando la validez de la totalidad de sus axiomas.

Algunos de los axiomas I. 1-6, II. 1-6, III. 1-4 y IV. 1-2 pueden obtenerse a partir de los demás. Es decir, nuestros axiomas plantean el problema de su independencia lógica. Esta tarea nos permite reconocer varios hechos novedosos y de gran utilidad en la investigación de los principios de la aritmética. Tomemos como ejemplo los siguientes.

La existencia del número 0 (axioma I.3) es una consecuencia de los axiomas I. 1, I. 2 y II. 1, por lo que tal principio depende esencialmente de la ley asociativa para la adición.

La existencia del número 1 (axioma I.6) se obtiene a partir de los axiomas I. 4, I. 5 y II. 3, por lo que se encuentra íntimamente relacionada con la ley asociativa para la multiplicación.

Por otra parte, la ley conmutativa para la adición (axioma II. 2) resulta de los axiomas I, II. 1, II. 4 y II. 5, por lo que podemos verla como una consecuencia de la ley asociativa para la adición y las leyes distributivas.

Prueba:

Tenemos que

$$(a + b)(1 + 1) = (a + b)1 + (a + b)1 = a + b + a + b$$

$$= a(1 + 1) + b(1 + 1) = a + a + b + b,$$

por lo que

$$a + b + a + b = a + a + b + b$$

y, por lo tanto, según I. 2,

$$b + a = a + b.$$

La ley conmutativa para la multiplicación (axioma II. 6) se obtiene de los axiomas I, II. 1-5, III y IV. 1, pero no se puede llegar a ella a partir de los axiomas I, II. 1-5 y III. Es decir, el principio se obtiene a partir del resto de los axiomas si y solamente si se añade también el axioma de Arquímedes (axioma IV.1). Este resultado adquiere especial importancia en lo que se refiere a los fundamentos de la geometría².

Los axiomas IV. 1 y IV. 2 son independientes entre sí y no nos informan nada acerca del concepto de convergencia, ni acerca de la existencia de un límite. Sin embargo, a partir de ellos puede deducirse el teorema de Bolzano sobre la existencia de un punto de acumulación. Por lo demás, es clara la coincidencia de nuestro sistema numérico con el sistema usual de los números reales.

La demostración de la consistencia del sistema de axiomas no requiere sino de una modificación apropiada de los métodos de deducción usuales. En esta prueba me parece vislumbrar igualmente la demostración de la existencia del agregado [Inbegriff] de los números reales, o, para servirnos de la terminología de G. Cantor, la demostración de que el sistema de los números reales constituye un conjunto consistente (acabado)³.

Todas las dudas y objeciones que se han planteado en relación a la existencia del agregado de los números reales y, en general, en relación a la existencia de conjuntos infinitos aparecen como algo injustificado una vez que hemos adoptado el enfoque que acabo de describir. De acuerdo con lo dicho, por conjunto de los números reales no tenemos que entender la totalidad de las leyes posibles según las cuales pueden avanzar los elementos de una sucesión fundamental, sino más bien, como acabamos de decir, un sistema de objetos cuyas relaciones se encuentran determinadas por el sistema *finito y cerrado* de los axiomas I-IV, y en relación al cual ninguna afirmación será válida si no puede deducirse a

² Cfr. D. Hilbert, *op. cit.*, Cap VI.

³ Hilbert utiliza aquí siguiendo a Cantor el término "consistent" para referirse a conjuntos en general, mismo que no ha de confundirse con "widerspruchsfrei" (literalmente: libre de contradicción), que es usual traducir como "consistente" para referirse a conjuntos de enunciados. Cantor (carta a Dedekind, 18.6.99) distingue entre multiplicidades consistentes e inconsistentes. Únicamente las primeras darían lugar a conjuntos. [N. de T.]

partir de esos axiomas por medio de un número finito de inferencias lógicas.

Sí procedemos de manera análoga para obtener una demostración de la existencia del agregado de todas las potencias (o el de todos los *alephs* cantorianos) es seguro que no tendremos éxito: el agregado de todas las potencias no existe; es decir, el sistema de todas las potencias es —en la terminología de Cantor— un conjunto inconsistente (inacabado)⁴.

⁴ Ver nota anterior. [N. de T.]